



БИБЛИОТЕКА
ИНЖЕНЕРА-
ГИДРОАКУСТИКА

Серия основана в 1976 году

В. Г. Гусев

**СИСТЕМЫ
ПРОСТРАНСТВЕННО-
ВРЕМЕННОЙ
ОБРАБОТКИ
ГИДРОАКУСТИЧЕСКОЙ
ИНФОРМАЦИИ**



Ленинград
„Судостроение”
1988

ББК32.875
Г96
УДК681.883

Редакционная коллегия:

А. В. АЛЕКСЕЕВ, В. И. БАБИЙ, Е. А. ВАСИЛЬЦОВ, П. К. ЗУБАРЕВ,
В. И. ИЛЬИЧЕВ, А. П. ЕВТЮТОВ, А. Е. КОЛЕСНИКОВ, Е. А. КОРЕПИН,
А. П. ЛЯЛИКОВ, В. Ф. МАРТЫНЮК, В. В. ОЛЬШЕВСКИЙ, Л. В. ОРЛОВ,
А. Л. ПРОСТАКОВ, В. А. САПРЫКИН, Г. М. СВЕРДЛИН,
Ю. Ф. ТАРАСЮК (ответственный редактор), В. И. ТИМОШЕНКО

Научный редактор канд. техн. наук Н. В. СЕМИДЕТНОВ

Рецензент д-р. техн. наук М. Д. СМАРЫШЕВ

Гусев В. Г.

Г96 Системы пространственно-временной обработки гидроакустической информации. — Л.: Судостроение, 1988. — 264 с.; ил. — (Библиотека инженера-гидроакустика).
ISBN 5-7355-0016-3

Изложены физические основы, теоретические положения и способы инженерного расчета и проектирования систем пространственно-временной обработки (СПВО) гидроакустической информации. Даны необходимые математические соотношения и формулы, позволяющие оценить помехоустойчивость адаптивных цифровых СПВО.

Для проектировщиков и разработчиков СПВО, а также для студентов, специализирующихся в области гидроакустики.

Г 3605030000-026 37-88
048 (01) -88

ББК 32.875

Производственное издание

Гусев Виктор Георгиевич
**СИСТЕМЫ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ
ОБРАБОТКИ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОЙ
ИНФОРМАЦИИ**

Заведующий редакцией П. К. Зубарев. Редактор Н. М. Розенгауз. Художественный редактор Э. А. Бубович. Технический редактор И. Ю. Подольская. Корректоры Т. С. Александрова, А. Г. Кувалкин, С. Н. Маковская
ИБ № 1101

Подписано в печать 11.02.88. М-27522. Формат 60 x 90 1/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,5. Усл. кр.-отт. 16,5. Уч.-изд. л. 18,1. Изд. № 4037-84. Зак. 445. Тираж 2960 экз. Цена 1 р. 30 к.

Набрано в издательстве „Судостроение“ на наборно-печатающем автомате операторами И. В. Дроздовой, В. А. Шевелевой

Издательство „Судостроение“, 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8.

Тульская типография Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Тула, пр. Ленина, 109.

ISBN 5-7355-0016-3

© Издательство „Судостроение“, 1988

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема оптимизации алгоритмов пространственно-временной обработки сигналов в информационных системах различного назначения уже давно привлекает внимание специалистов. Ее актуальность обусловлена двумя обстоятельствами: стремлением повысить эффективность систем и возможностью их реализации средствами современной радиоэлектроники. К настоящему времени советскими и зарубежными учеными созданы основы общей теории оптимальных систем пространственно-временной обработки (СПВО) и определены особенности ее применения в различных информационных системах. В наибольшей степени это относится к радиолокационным системам [29, 53, 77], используемые здесь положения теории СПВО тесно связаны с их спецификой.

Оптимальные СПВО нуждаются в такой априорной информации, которая в реальных системах отсутствует. В связи с этим возникает необходимость адаптивной оптимизации алгоритмов пространственно-временной обработки. Такие СПВО, интенсивно развиваемые в антенной технике, получили специальное название — адаптивные антенные системы (ААС). Эти системы позволяют преодолеть априорную неопределенность в знании характеристик помехосигнальных ситуаций и практически оптимизировать работу системы в реальных условиях.

Отмеченные выше направления развития СПВО важны также и для систем обработки гидроакустической информации [8, 46, 47]. Поэтому инженеры гидроакустики должны иметь четкие и систематизированные представления о методах синтеза, анализа и расчета характеристик СПВО. Однако формирование этих представлений затруднено тем, что основные положения теории СПВО базируются на научных результатах, содержащихся главным образом в журнальных статьях. В связи с этим в настоящей книге сделана попытка изложить с единых методологических позиций основы теории СПВО так, чтобы логическая полнота сочеталась с удобством практического использования теоретических результатов. При этом предполагается, что специалисты в области гидроакустики знакомы с физическими основами и методами анализа процессов в традиционных системах. Поэтому главная цель книги заключается в формировании таких инженерных представлений, которые позволили бы понимать пространственно-временную обработку как единый процесс, анализировать и выполнять расчеты характеристик СПВО и их помехоустойчивости.

Автор выражает признательность А. М. Дымшицу, Г. В. Лоскутовой, Е. В. Черенковой и А. М. Якубовскому за помощь и полезное обсуждение отдельных вопросов, а также М. Д. Смаришеву за ряд предложений, способствовавших улучшению книги. Отзывы и критические замечания следует направлять по адресу: 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8, издательство „Судостроение.“

ОСНОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

ААС – адаптивная антенная система
 АС – антенная система
 АР – антенная решетка
 АЦП – аналого-цифровой преобразователь
 АЧХ – амплитудная частотная характеристика
 ВСПМ – взаимная спектральная плотность мощности
 ДПФ – дискретное преобразование Фурье
 ИХ – импульсная характеристика
 КПФ – конечное преобразование Фурье
 КЧХ – комплексная частотная характеристика
 ЛЗ – линия задержек
 ОП – отношение правдоподобия
 ПВКФ – пространственно-временная корреляционная функция
 СПВО – система пространственно-временной обработки
 с/ш – сигнал/шум
 УО – угловой отклик
 УФХН – устройство формирования характеристики направленности
 ФЧХ – фазовая частотная характеристика
 ХН – характеристика направленности
 ЧВС – частотно-волновой спектр
 ЧПС – частотно-пространственный спектр
 $A(f)$ – амплитудно-фазовое распределение
 $B(f)$ – КЧХ ААС для заданного направления
 $D_{ps}(f)$ – ХН линейной АР
 E – единичная матрица
 F – ширина полосы частот
 F_i – i -й собственный вектор матрицы
 $g_x(f)$ – спектральная плотность процесса на входе элемента АР
 $G_x(f)$ – матричная спектральная плотность процесса
 $g_{mn}(f)$ – взаимная спектральная плотность
 $\hat{G}_x(f)$ – матричная спектральная плотность последовательности
 $\mathcal{H}(t)$ – векторная ИХ
 $h_m(t)$ – m -я составляющая векторной ИХ
 $H(f)$ – векторная КЧХ
 $H_m(f)$ – m -я составляющая векторной КЧХ
 $h(f)$ – КЧХ скалярного фильтра оптимальной СПВО
 I – вектор с составляющими из единиц
 L – длина линейной АР
 L – число временных отсчетов на интервале T
 $L_x(f)$ – волновой вектор (область $\{f, \vec{r}\}$)

$L_x(f)$ – волновой вектор (область $\{f, \vec{\varphi}\}$)
 M – число элементов линейной АР
 $M[\dots]$ – оператор математического ожидания
 N – число дискретных временных отсчетов на интервале T_0
 N – число дискретных отсчетов частоты
 $N(f)$ – матрица ВСПМ изотропного шума (область $\{f, \vec{r}\}$)
 $N(f)$ – матрица ВСПМ изотропного шума (область $\{f, \vec{\varphi}\}$)
 $P(f, \vec{p})$ – ЧПС поля
 $Q_n(t_1, t_2)$ – матрица, обратная корреляционной матрице шума
 Q – выходное отношение с/ш оптимальной СПВО
 \hat{Q} – выходное отношение с/ш цифровой СПВО
 $R_x(\tau)$ – матричная корреляционная функция
 $r_{mn}(\tau)$ – взаимная корреляционная функция
 $r(\tau, \vec{p})$ – ПВКФ поля
 $R_x(l, k)$ – матрица корреляций l -й и k -й временных выборок на элементах АР
 R_{xx} – матрица корреляций входного процесса на отводах ЛЗ
 $R_{ps}(f)$ – ХН линейной АР (с началом координат в фазовом центре)
 T – интервал задания входной реализации
 T_0 – интервал обработки
 $v(f)$ – КЧХ скалярного фильтра адаптивной СПВО
 $V_s(f)$ – матрица изображений временных задержек
 V – преобразованный весовой вектор W
 $w_m(n\Delta), w_{mn}^*$ – весовые коэффициенты
 W – вектор весовых коэффициентов
 $\hat{W}(f)$ – векторная КЧХ дискретного фильтра
 $\hat{W}_m(f)$ – m -я составляющая векторной КЧХ $\hat{W}(f)$
 $\mathcal{X}(t)$ – многомерный случайный процесс
 $x_m(t)$ – m -я составляющая вектора $\mathcal{X}(t)$
 $X(f)$ – изображение реализации процесса $\mathcal{X}(t)$
 $X_m(f)$ – m -я составляющая вектора $X(f)$
 $\mathcal{X}(n\Delta)$ – многомерная случайная последовательность
 $x_m(n\Delta)$ – m -я составляющая вектора $\mathcal{X}(n\Delta)$
 $\hat{\mathcal{X}}(f)$ – изображение реализации последовательности $\mathcal{X}(n\Delta)$
 $\hat{\mathcal{X}}_m(f)$ – m -я составляющая вектора $\hat{\mathcal{X}}(f)$
 $x(t, y), x(t, md),$
 $x(n\Delta, md)$ – варианты реализации поля на линейной антенне
 $\mathcal{X}(f, \varphi_y),$
 $\hat{\mathcal{X}}(f, \varphi_y),$
 $\hat{\mathcal{X}}^{**}(f, \varphi_y)$ – двумерные изображения соответственно реализаций поля
 $x(t, y), x(t, md), x(n\Delta, md)$
 $\hat{X}_s(f)$ – оценка многомерного сигнала
 α – угол, определяющий направление прихода плоской волны
 Δ – интервал временной дискретизации
 \mathcal{E} – погрешность АЦП
 $\eta(t)$ – ИХ скалярного фильтра оптимальной СПВО
 $\mathcal{Z}(f)$ – выигрыш в отношении с/ш оптимальной СПВО
 Λ – матрица собственных чисел матрицы R_{xx}

* — арифметические ошибки

$\Phi_y(f, \varphi_y)$,

* $\Phi_y(f, \varphi_y)$,

** $\Phi_y(f, \varphi_y)$ — ЧВС поля, отвечающие его реализациям $x(t, y)$, $x(t, md)$,
 $x(n\Delta, md)$

$\vec{\varphi}$ — вектор пространственной частоты с проекциями $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$
 φ_r — r -е дискретное значение проекции φ_y пространственной частоты

$\Psi(\tau, \vec{\varphi})$ — волновой спектр поля

Черта над

обозначением

— знак комплексного сопряжения

* и ** — знаки над обозначением, соответствующие изображениям дискретных временной и пространственно-временной выборок

s, n, p — индексы, определяющие принадлежность величины сигналу, шуму, помехе

T — знак транспонирования

В большинстве радиотехнических, сейсмологических, гидроакустических и других подобных системах входная информация обрабатывается поэтапно. На первом этапе осуществляется пространственная обработка, на втором — временная. В традиционных системах эти этапы оптимизируются отдельно. Оптимизация пространственной обработки, выполняемой антенной решеткой (АР), обычно сводится к выбору такого амплитудного распространения, которое удовлетворяло бы заданным требованиям к характеристике направленности антенны (ХН). Оптимизация временной обработки заключается в различного рода фильтрации сигналов. В общем случае отдельная оптимизация не гарантирует оптимальности системы в целом. Следовательно, оба этих этапа необходимо рассматривать как единый процесс пространственно-временной обработки информации и оптимизировать его на основе единого критерия, отвечающего цели обработки в данной системе (обнаружению сигнала, оценке его параметров). Поэтому методологический подход к описанию процесса пространственно-временной обработки в данной книге таков: входная информация на элементах АР рассматривается как многомерный случайный процесс, а сама СПВО — как многоканальная динамическая система. Для решения задач синтеза и анализа СПВО необходимо задать характеристики входного процесса, которые получают из вероятностного описания пространственно-временных полей сигнала и шума, наблюдаемых на элементах АР. Чтобы полнее раскрыть особенности СПВО, это описание сделано не только для входных полей в области пространственные координаты — время, но и для областей пространственные координаты — временная частота и пространственные частоты — временная частота. Такой подход к изложению основных теоретических положений пространственно-временной обработки позволяет решать задачи обнаружения многомерных сигналов и оценки их параметров теми же методами, что и аналогичные задачи для скалярных сигналов.

В соответствии с описанным подходом в гл. 1 даны краткие основы математического описания многомерных случайных процессов, многоканальных систем и пространственно-временных полей, а в гл. 2 изложены методы синтеза и анализа оптимальных СПВО. В этой же главе проанализирована помехоустойчивость оптимальной, традиционной и нескольких вариантов субоптимальных СПВО, решающих задачу обнаружения многомерного сигнала, а также приведен алгоритм оценки параметра

МНОГОКАНАЛЬНЫЕ ПРИЕМНЫЕ СИСТЕМЫ И ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ПОЛЯ

многомерного сигнала, конкретизированный для измерения углового положения фронта плосковолнового сигнала.

Использование методов адаптивной оптимизации в СПВО имеет свои особенности. Для их понимания важную роль играет связь между алгоритмами оптимального обнаружения многомерного сигнала и алгоритмами его оптимальной фильтрации (оценивания), используемыми в ААС. Поэтому в гл. 3 при рассмотрении алгоритмов адаптивной оптимизации и принципов их реализации в СПВО определенное внимание уделено исследованию указанной связи.

Использование в СПВО средств цифровой вычислительной техники вызывает необходимость проанализировать возникающие при этом особенности реализации алгоритмов пространственно-временной обработки, а также методы оценки помехоустойчивости цифровых СПВО. Это сделано в гл. 4, где, кроме того, изложены способы количественного описания некоторых факторов цифровой обработки, не нашедшие четкого отражения в литературе.

Основные положения теории СПВО проиллюстрированы примерами, в качестве которых для более полного раскрытия физического смысла свойств СПВО использованы системы с эквидистантными линейными и плоскими АР. Уровень изложения предполагает, что читатели знакомы с основами теории матриц; более сложные операции с матрицами поясняются по ходу изложения.

1.1. Многомерные случайные процессы

Вероятностные характеристики. Совокупность нескольких случайных функций $x_m(t)$ ($m=0, 1, \dots, M-1$) представим в виде многомерного (векторного) случайного процесса — вектора-столбца $\mathbf{x}(t) = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_{M-1}(t)]^T$, где T — знак транспонирования.

Для задач, рассматриваемых в книге, можно ограничиваться использованием двух первых моментов векторных случайных процессов — математического ожидания и корреляционной матрицы. Математическое ожидание векторного случайного процесса $A_x(t) = M \{x(t)\}$ есть вектор-функция с составляющими $a_m(t) = M \{x_m(t)\}$, где $M \{ \dots \}$ — символ математического ожидания. Элементами матричной корреляционной функции $R_x(t_1, t_2)$ (размером $M \times M$) являются скалярные функции

$$r_{x_m x_n}(t_1, t_2) = M \{ [x_m(t_1) - a_m(t_1)] [x_n(t_2) - a_n(t_2)] \}. \quad (1.1.1)$$

Для краткости $r_{x_m x_n}(t_1, t_2)$ обозначим $r_{mn}(t_1, t_2)$.

Корреляционная матрица $R_x(t_1, t_2) = M \{ \mathbf{x}(t_1) \mathbf{x}^T(t_2) \}$, где $\mathbf{x}^T(t) = \mathbf{x}(t) - A_x(t)$ центрированный процесс. Следовательно, ковариационная матрица

$$K_x(t_1, t_2) = M \{ \mathbf{x}(t_1) \mathbf{x}^T(t_2) \} = R_x(t_1, t_2) + A_x(t_1) A_x^T(t_2).$$

Корреляционная матрица $R_x(t_1, t_2) = R_x^T(t_2, t_1)$.

Векторный процесс является стационарным (в широком смысле), если его математическое ожидание не зависит от времени, т. е. $A_x(t) = A_x = \text{const}$, а матричная корреляционная функция зависит только от разности аргументов $t_2 - t_1$, т. е. $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1)$. Это означает, что стационарны и стационарно связаны все скалярные случайные процессы, образующие векторный процесс. Далее будем считать, что $t_2 = t_1 + \tau$, поэтому для стационарного процесса $R_x(t_1, t_1 + \tau) = R_x(\tau)$. В таком случае справедливо равенство $R_x(\tau) = R_x^T(-\tau)$, отражающее известное свойство взаимной корреляционной функции двух процессов $x_m(t_1)$ и $x_n(t_1 + \tau)$, для которых $r_{mn}(\tau) = r_{nm}(-\tau)$. Ковариационная $K_x(\tau)$ и корреляционная $R_x(\tau)$ матрицы стационарного векторного процесса $\mathbf{x}(t)$ и его математическое ожидание A_x связаны соотношением

$$K_x(\tau) = R_x(\tau) + A_x A_x^T, \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (1.1.2)$$

В дальнейшем будут использованы квадратичные формы – математические конструкции, которые образуются при описании линейной обработки центрированного случайного многомерного процесса с помощью векторной весовой функции $B(t)$ путем вычисления скалярной случайной величины

$$z = \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=0}^{M-1} b_m(t) x_m(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} B^T(t) \dot{X}(t) dt. \quad (1.1.3)$$

Определение среднего значения квадрата величины z приводит к квадратичной форме

$$M \{z^2\} = \sigma_z^2 = M \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} B^T(t_1) \dot{X}(t_1) \dot{X}^T(t_2) B(t_2) dt_1 dt_2 \right\} = \\ = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} b_m(t_1) r_{mn}(t_2 - t_1) b_n(t_2) dt_1 dt_2, \quad (1.1.4)$$

которая представляет собой функционал относительно вектор-функции обработки $B(t)$. Величина σ_z^2 определяется видом этой вектор-функции. Корреляционная матрица $R_x(t_2 - t_1)$ и соответствующая ей квадратичная форма обладают неотрицательной определенностью, т. е. для любой векторной функции $B(t)$ с M составляющими и любых t сумма в правой части равенства (1.1.4) больше или равна нулю. Причем квадратичная форма равна нулю лишь в случае, когда $B(t) \equiv 0$.

Спектральное представление матричной корреляционной функции. Как и для скалярного процесса оно основано на теореме Винера–Хинчина, с помощью которой определяется матричная спектральная плотность (спектральная матрица) векторного случайного процесса

$$G_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j \cdot 2\pi f \tau} d\tau, \quad (1.1.5)$$

где m, n -й элемент $g_{mn}(f)$ [или кратко $g_{mn}(f)$] матрицы $G_x(f)$ является Фурье-преобразованием m, n -го элемента корреляционной матрицы $R_x(\tau)$, т. е. преобразованием взаимной корреляционной функции $r_{mn}(\tau)$. С помощью обратного Фурье-преобразования спектральной матрицы $G_x(f)$ может быть определена корреляционная матрица

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) e^{j \cdot 2\pi f \tau} df. \quad (1.1.6)$$

Взаимная спектральная плотность $g_{mn}(f)$ – m, n -й элемент матрицы $G_x(f)$ – является комплексной функцией, в силу свойства взаимной корреляционной функции $r_{mn}(\tau) = r_{nm}(-\tau)$ она комплексно сопряжена

с $g_{nm}(f)$, т. е. $g_{mn}(f) = \overline{g_{nm}(f)} = g_{nm}(-f)$, (здесь и далее черта сверху – знак комплексного сопряжения). Отсюда следует, что спектральная матрица $G_x(f)$ является эрмитовой – она не изменяется в результате транспонирования и комплексного сопряжения: $\overline{G_x^T(f)} = G_x(f)$. Кроме того, спектральная матрица неотрицательна, т. е. для любой векторной функции $D(f)$ с M составляющими $d_m(f)$ – квадратичная форма

$$\overline{D}^T(f) G_x(f) D(f) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} \overline{d_m(f)} g_{nm}(f) d_n(f) \geq 0. \quad (1.1.7)$$

Спектральная матрица может быть также определена путем измерения выборочного взаимного спектра [24] ее элементов

$$C_{mn}(f) = (1/T) \overline{X}_m(f) X_n(f), \quad (1.1.8)$$

где $X_m(f)$ и $X_n(f)$ – Фурье-изображения реализаций составляющих многомерного процесса $x_m(t)$ и $x_n(t)$, заданных на интервале времени $|t| \leq T/2$, т. е.

$$X_m(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x_m(t) e^{-j2\pi f t} dt, \quad X_n(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x_n(t) e^{-j2\pi f t} dt. \quad (1.1.9)$$

Выборочная спектральная матрица

$$C_x(f) = \frac{1}{T} \overline{X}(f) X^T(f), \quad (1.1.10)$$

где M – компонентный вектор $X(f) = \{X_0(f), X_1(f), \dots, X_{M-1}(f)\}$. В соответствии с положениями спектрального анализа [24]

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M \{C_x(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j \cdot 2\pi f \tau} d\tau = G_x(f). \quad (1.1.11)$$

Многомерные дискретные случайные последовательности. Их рассмотрение целесообразно, во-первых, в связи с необходимостью использования в дальнейшем описания многомерного случайного процесса через многомерную плотность распределения его дискретных значений, во-вторых, в связи с применением для реализации СПВО цифровых методов. Положим, что каждая составляющая $x_m(t)$ непрерывного многомерного случайного процесса $X(t)$ подвергнута дискретизации по времени в точках $t = n\Delta$, где Δ – интервал дискретизации, n – целое число. Тогда составляющей $x_m(t)$ непрерывного многомерного процесса будет соответствовать дискретная последовательность $x_m(n\Delta)$.

Вероятностные характеристики многомерной дискретной последовательности – $X(n\Delta)$ – математическое ожидание и корреляционная матрица – определяются так же, как для непрерывного многомерного процесса, но для дискретных моментов времени, $t_1 = n_1 \Delta$ и $t_2 = n_2 \Delta$.

Корреляционная функция стационарной дискретной последовательности определяется разностью $t_2 - t_1 = (n_2 - n_1) \Delta = \nu \Delta$. Таким образом $\tau = \nu \Delta$, где ν — целое число. Матричная спектральная плотность многомерной дискретной последовательности в отличие от выражения (1.1.5) определяется следующим образом:

$$G_x^*(f) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_x(\nu \Delta) e^{-j \cdot 2\pi f \Delta \nu}, \quad (1.1.12)$$

где m, n -й элемент матрицы $G_x^*(f)$ является дискретным Фурье-преобразованием m, n -го элемента матрицы $R_x(\nu \Delta)$, т. е. преобразованием взаимной корреляционной функции $r_{mn}(\nu \Delta)$. Звездочкой сверху будем отличать спектр дискретной последовательности $G_x^*(f)$ от спектра $G_x(f)$ соответствующего непрерывного процесса. С помощью обратного дискретного преобразования Фурье спектральной матрицы $G_x^*(f)$ может быть найдена корреляционная матрица

$$R_x(\nu \Delta) = \Delta \int_{-(1/2)\Delta}^{(1/2)\Delta} G_x^*(f) e^{j \cdot 2\pi f \Delta \nu} df. \quad (1.1.13)$$

Матрица $G_x^*(f)$, так же, как и $G_x(f)$, эрмитова.

Сравним m, n -е элементы матриц $G_x(f)$ и $G_x^*(f)$, т. е. взаимные спектральные плотности $g_{mn}(f)$ непрерывных процессов $x_m(t)$ и $x_n(t)$ и $\dot{g}_{mn}(f)$ соответствующих дискретных последовательностей для $t = n\Delta$. Принципиальное различие спектров $g_{mn}(f)$ и $\dot{g}_{mn}(f)$, рассматриваемых как функции частоты f , заключается в том, что первый спектр является аperiodической функцией частоты, а второй — периодической, с периодом $1/\Delta$, равным частоте дискретизации f_d . Это утверждение следует непосредственно из выражения (1.1.12): $\dot{g}_{mn}(f + k/\Delta) = \dot{g}_{mn}(f)$, где k — целое число. Это и определяет пределы интегрирования в формуле (1.1.13), которые отвечают границам $\pm 1/2 \Delta$ основной полосы периодичности функции $\dot{g}_{mn}(f)$. Известно соотношение, связывающее спектры $\dot{g}_{mn}(f)$ и $g_{mn}(f)$ [75]:

$$\dot{g}_{mn}(f) = \frac{1}{\Delta} \sum_{r=-\infty}^{\infty} g_{mn}(f + r/\Delta). \quad (1.1.14)$$

Физически это соотношение означает, что в результате дискретизации непрерывного процесса с частотой $f_d = 1/\Delta$ происходит транспонирование высоких частот в основную полосу $(-1/2\Delta, 1/2\Delta)$ — стробоскопический эффект дискретизации. Если спектр непрерывного процесса отличен от нуля лишь в диапазоне $-f_b \leq f \leq f_b$, где f_b — верхняя граничная частота, то, как следует из (1.14), при условии, что $f_d = 1/\Delta \geq 2f_b$, спектр не искажается, и в полосе $(-1/2\Delta, 1/2\Delta)$ $\dot{g}_{mn}(f) = (1/\Delta) g_{mn}(f)$. Заметим, что спектры $\dot{g}_{mn}(f)$ и $g_{mn}(f)$ имеют разную размерность: $[\dot{g}] = [g] c^{-1}$ [см. выражения (1.1.5) и (1.1.12)].

Спектральная матрица дискретного процесса, так же как и непрерывного, может быть определена на основе выборочных взаимных спектров ее элементов: [см. выражение (1.1.8)]. Пусть непрерывная реализация $x_m(t)$, заданная на интервале $|t| \leq T/2$, дискретизирована с интервалом Δ в точках $t = n\Delta$, причем число таких точек N , т. е. $T = N\Delta$. Положим, что спектр исходного непрерывного процесса ограничен частотой f_b , причем $\Delta \leq 1/2f_b$. В таком случае Фурье-изображение $X_m(f)$ [см. (1.1.9)] непрерывного процесса и Фурье-изображение соответствующего дискретного процесса

$$\dot{X}_m(f) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x_m(n\Delta) e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n} \quad (1.1.15)$$

связаны между собой соотношением $\dot{X}_m(f) = (1/\Delta) X_m(f)$. В результате из выражения (1.1.8) находим

$$C_{mn}(f) = \frac{\Delta}{N} \dot{X}_m^*(f) \dot{X}_n^*(f) \text{ или } \dot{C}_{mn}(f) = \frac{1}{N} \dot{X}_m^*(f) \dot{X}_n^*(f), \quad (1.1.16)$$

где $\dot{C}_{mn}(f) = (1/\Delta) C_{mn}(f)$ — выборочный взаимный спектр дискретной последовательности.

Выборочная спектральная матрица многомерной дискретной последовательности

$$\dot{C}_x^*(f) = \frac{1}{N} \dot{X}(f) \dot{X}^T(f), \quad (1.1.17)$$

где M -компонентный вектор $\dot{X}(f) = [\dot{X}_0(f), \dot{X}_1(f), \dots, \dot{X}_{M-1}(f)]$. Аналогично (1.1.11)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M \left\{ \dot{C}_x^*(f) \right\} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} R_x(\nu \Delta) e^{-j \cdot 2\pi f \Delta \nu} = G_x^*(f). \quad (1.1.18)$$

В заключение рассмотрим вопрос о соотношении характеристик дискретного и непрерывного белого шума. В работе [56] последний определяется с помощью случайного процесса с корреляционной функцией $r(\tau) = \sigma^2 \exp(-a|\tau|)$, которой отвечает спектральная плотность $g(f) = 2a\sigma^2 / (a^2 + 4\pi^2 f^2)$. Чем больше величина a , тем более пологим становится график зависимости $g(f)$ и более крутым — $r(\tau)$. На основе предельного перехода $a \rightarrow \infty$ в работе [56] определяется корреляционная функция непрерывного белого шума $r(\tau) = c\delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функция, а $c = 2\sigma^2/a = g(0)$. Рассмотрим аналогичным образом тот же процесс, но дискретизированный с интервалом Δ , для которого $r(\nu \Delta) = \sigma^2 \exp(-a\Delta|\nu|)$, а в соответствии с (1.1.12) $\dot{g}^*(f) = \sigma^2 \text{sh } a\Delta / (\text{ch } a\Delta - \cos 2\pi f \Delta)$. Так как

$$\sigma^2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-a\Delta|\nu|} = \sigma^2 \frac{1 + e^{-a\Delta}}{1 - e^{-a\Delta}} = \sigma^2 \frac{\text{sh } a\Delta}{\text{ch } a\Delta - 1} = \dot{g}^*(0),$$

то корреляционная функция дискретного белого шума

$$r(\nu\Delta) = \check{c}^* \delta_0(\nu\Delta), \delta_0(\nu\Delta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu=0; \\ 0 & \text{при } \nu \neq 0; \end{cases} \quad (1.1.19)$$

где $\check{c} = \check{g}^*(0)$. При малых Δ (точнее малых $a\Delta$) имеем

$$\check{c} = \check{g}^*(0) \approx 2\sigma^2/a\Delta = g(0)/\Delta = c/\Delta, \quad (1.1.20)$$

что устанавливает связь между спектральными плотностями непрерывного и дискретного белого шума.

1.2. Многоканальные системы

Описание многоканальной системы во временной и частотной областях. Динамические свойства многоканальных (многомерных) систем описываются аналогично одномерным, однако их характеристики являются не скалярными, а матричными функциями. Для дальнейшего изложения достаточно ограничиться рассмотрением линейных стационарных многомерных систем. Положим, что $\mathcal{X}(t)$ — M -компонентный вектор входа [с составляющими $x_m(t)$, $m=0, 1, \dots, M-1$], а $\mathcal{Y}(t)$ — Q -компонентный вектор выхода [с составляющими $y_q(t)$, $q=0, 1, \dots, Q-1$].

Тогда векторы входа и выхода $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{Y}(t)$ связаны между собой матричной импульсной характеристикой $\mathcal{H}(t)$ (матрицей размером $M \times Q$) — интегралом свертки

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^T(t-\lambda) \mathcal{X}(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \mathcal{H}^T(\lambda) \mathcal{X}(t-\lambda) d\lambda, \quad (1.2.1)$$

причем в развернутом виде матричная запись (1.2.1) означает, что

$$y_q(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \int_0^{\infty} h_{mq}(\lambda) x_m(t-\lambda) d\lambda, \quad q=0, 1, \dots, Q-1, \quad (1.2.2)$$

где ИХ $h_{mq}(t)$ связывает m -й вход $x_m(t)$ с q -м выходом $y_q(t)$. На рис. 1.1

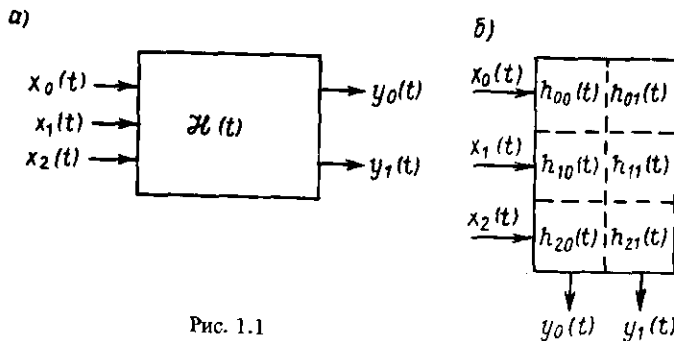


Рис. 1.1

показаны эти соотношения для $M=3$ и $Q=2$. ИХ $\mathcal{H}(t)$ отвечает физически возможной системе, если $\mathcal{H}(t-\lambda) = 0$ при $\lambda > t$, что учтено в формуле (1.2.1).

Важное значение для описания многомерной системы имеет матричная комплексная частотная характеристика (КЧХ) $H(f)$, которая является Фурье-преобразованием матрицы $\mathcal{H}(t)$

$$H(f) = \int_0^{\infty} \mathcal{H}(t) e^{-j \cdot 2\pi f t} dt, \quad \mathcal{H}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j \cdot 2\pi f t} df. \quad (1.2.3)$$

Далее будем также использовать следующую краткую запись подобных выражений: $H(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{H}(t)\}$, $\mathcal{H}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$, где $\mathcal{F}\{\dots\}$ и $\mathcal{F}^{-1}\{\dots\}$ операторы прямого и обратного Фурье-преобразований. Матрица $H(f)$ размером $M \times Q$ связывает между собой Фурье-изображения $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ и $Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ входного и выходного процессов, так что

$$Y(f) = H^T(f) X(f) \text{ или } Y_q(f) = \sum_{m=0}^{M-1} H_{mq}(f) X_m(f), \quad (1.2.4)$$

где $H_{mq}(f) = \mathcal{F}\{h_{mq}(t)\}$ и $X_m(f) = \mathcal{F}\{x_m(t)\}$.

Преобразование многомерного случайного процесса многоканальной системой. Рассмотрим прохождение M -мерного случайного процесса $\mathcal{X}(t)$ через многоканальную систему с матричной КЧХ $H(f)$ размером $M \times Q$. Для Фурье-изображения $X(f)$ реализации случайного процесса $\mathcal{X}(t)$, заданного на интервале $|t| \leq T/2$ [см. (1.1.9)], можно использовать выражение (1.2.4) и на основе (1.1.10) определить

$$\begin{aligned} C_y(f) &= (1/T) \bar{Y}(f) Y^T(f) = (1/T) \bar{H}^T(f) \bar{X}(f) X^T(f) H(f) = \\ &= \bar{H}^T(f) C_x(f) H(f) \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись предельным переходом (1.1.11), получаем

$$G_y(f) = \bar{H}^T(f) G_x(f) H(f) \quad (1.2.5)$$

— представление спектральной матрицы выходного процесса $G_y(f)$ (размером $Q \times Q$) с помощью матричной КЧХ системы $H(f)$ (размером $M \times Q$) и спектральной матрицы входного процесса $G_x(f)$ (размером $M \times M$).

Рассмотрим многоканальную систему с M входами и одним выходом. Такая система описывается матрицами $\mathcal{H}(t)$ и $H(f)$ и размером $M \times 1$, т. е. векторами с M компонентами. Будем в этом случае называть $\mathcal{H}(t)$ — векторной ИХ, а $H(f)$ — векторной КЧХ. Структурная схема системы изображена на рис. 1.2, где $h_m(t)$ — составляющие векторной ИХ $\mathcal{H}(t)$;

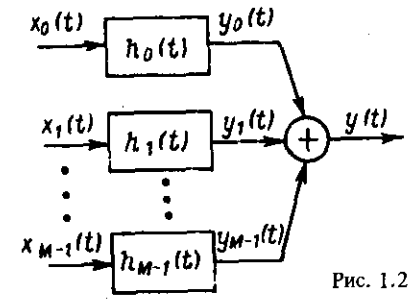


Рис. 1.2

$x_m(t)$ — составляющие вектора входа $\mathcal{X}(t)$; скаляр $y(t)$ — единственный выход системы; результат преобразования m -го входа $x_m(t)$ с помощью m -й компоненты $h_m(t)$ векторной ИХ есть $y_m(t)$, сумма M этих величин есть выход $y(t)$. Из формул (1.2.1) и (1.2.2) находим, что

$$y(t) = \int_0^{\infty} \mathcal{H}^T(\lambda) \mathcal{X}(t-\lambda) d\lambda = \sum_{m=0}^{M-1} \int_0^{\infty} h_m(\lambda) x_m(t-\lambda) d\lambda. \quad (1.2.6)$$

Соответственно в частотной области (1.2.4) изображение $Y(f)$ выхода системы $y(t)$ определяется выражением

$$Y(f) = H^T(f) X(f) = \sum_{m=0}^{M-1} H_m(f) X_m(f), \quad (1.2.7)$$

где $H_m(f)$ — компоненты векторной КЧХ $H(f)$; $X_m(f)$ — компоненты вектора $X(f)$ Фурье-изображения $\mathcal{X}(t)$.

Матричное соотношение (1.2.5) для рассматриваемой системы принимает вид квадратичной формы, определяющей спектральную плотность $g_y(f)$ выходного скалярного процесса $y(t)$

$$g_y(f) = \bar{H}^T(f) G_x(f) H(f) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} \bar{H}_m(f) g_{mn}(f) H_n(f). \quad (1.2.8)$$

Часто возникает необходимость изучения взаимодействия выходов двух различных систем, входами которых является один и тот же многомерный процесс. Рассмотрим две системы: одну с M -компонентной векторной ИХ $\mathcal{X}(t)$, а вторую с ИХ той же размерности $\mathcal{Z}(t)$, причем входами обеих систем является M -мерный случайный процесс $\mathcal{X}(t)$. Выходами этих систем соответственно являются скалярные процессы $y(t)$ и $z(t)$. Поэтому аналогично (1.2.6) и (1.2.7) можем записать

$$z(t) = \int_0^{\infty} \mathcal{K}^T(\lambda) \mathcal{X}(t-\lambda) d\lambda; \quad Z(f) = K^T(f) X(f). \quad (1.2.9)$$

В таком случае взаимная спектральная плотность мощности $g_{yz}(f)$ процессов $y(t)$ и $z(t)$ определяется подобно (1.2.8) выражением

$$g_{yz}(f) = \bar{H}^T(f) G_x(f) K(f) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} \bar{H}_m(f) g_{mn}(f) K_n(f). \quad (1.2.10)$$

Следует подчеркнуть, что приведенные выше выражения справедливы лишь для установившегося режима. Для этого достаточно, чтобы величина интервала, определяющего время воздействия входного процесса на систему, была в несколько раз больше максимальной постоянной времени системы.

Многоканальная дискретная система и преобразование ею многомерной дискретной последовательности. Рассмотрим систему с M входами

и одним выходом, когда M -мерный вектор входа $\mathcal{X}(n\Delta)$ с составляющими $x_0(n\Delta), x_1(n\Delta), \dots, x_{M-1}(n\Delta)$ связан со скалярным выходом $y(n\Delta)$ векторной ИХ $W(n\Delta)$ M -мерной дискретной системы дискретной сверткой

$$y(n\Delta) = \sum_{l=0}^{\infty} W^T(l\Delta) \mathcal{X}(n\Delta - l\Delta) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{\infty} w_m(l\Delta) x_m(n\Delta - l\Delta). \quad (1.2.11)$$

Соответственно в частотной области Фурье-изображение $\hat{Y}(f)$ последовательности $y(n\Delta)$ определяется скалярным произведением

$$\hat{Y}(f) = \hat{W}^T(f) \hat{X}(f) = \sum_{m=0}^{M-1} \hat{W}_m(f) \hat{X}_m(f), \quad (1.2.12)$$

где $\hat{X}(f)$ — Фурье-изображение M -мерной дискретной последовательности $\mathcal{X}(n\Delta)$, составляющие которой определяются формулой (1.1.15), а векторы $W(n\Delta)$ и $\hat{W}(f)$ связаны между собой дискретным преобразованием Фурье

$$\hat{W}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} W(n\Delta) e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n}, \quad W(n\Delta) = \Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} \hat{W}(f) e^{j \cdot 2\pi f \Delta n} df. \quad (1.1.13)$$

Далее будем использовать следующую запись подобных выражений: $\hat{W}(f) = \hat{\mathcal{F}}\{W(n\Delta)\}$ и $W(n\Delta) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}\{\hat{W}(f)\}$, где $\hat{\mathcal{F}}\{\dots\}$ и $\hat{\mathcal{F}}^{-1}\{\dots\}$ — операторы прямого и обратного дискретных преобразований Фурье. Таким образом, выражение (1.2.12) связывает между собой Фурье-изображения вектора $\hat{X}(f) = \hat{\mathcal{F}}\{\mathcal{X}(n\Delta)\}$ и скаляра $\hat{Y}(f) = \hat{\mathcal{F}}\{y(n\Delta)\}$.

Рассмотрим прохождение M -мерной случайной дискретной последовательности $\mathcal{X}(n\Delta)$ через многоканальную систему с векторной КЧХ $\hat{W}(f)$ (1.2.13). Из соотношения (1.2.12) и формулы (1.1.17) находим

$$\begin{aligned} \hat{C}_y(f) &= \frac{1}{N} |\hat{Y}(f)|^2 = \frac{1}{N} \bar{\hat{W}}^T(f) \bar{\hat{X}}(f) \hat{X}^T(f) \hat{W}(f) = \\ &= \bar{\hat{W}}^T(f) \frac{1}{N} \hat{C}_x(f) \hat{W}(f). \end{aligned}$$

Воспользовавшись далее последним выражением и предельным переходом (1.1.18), получаем аналогично (1.2.8)

$$\hat{g}_y(f) = \bar{\hat{W}}^T(f) \hat{G}_x(f) \hat{W}(f) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} \bar{\hat{W}}_m(f) \hat{g}_{mn}(f) \hat{W}_n(f). \quad (1.2.14)$$

Для взаимной спектральной плотности $\hat{g}_{yz}(f)$ выходных переменных $y(n\Delta)$ и $z(n\Delta)$ двух дискретных M -мерных систем с векторными КЧХ $\hat{W}(f)$ и $\hat{K}(f)$ аналогично (1.2.10) находим

$$\vec{g}_{yz}(f) = \vec{W}^T(f) \vec{G}_x(f) \vec{K}(f) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} \vec{W}_m(f) \vec{g}_{mn}(f) \vec{K}_n(f). \quad (1.2.15)$$

1.3. Пространственно-временные поля

Для полного описания пространственно-временных гидроакустических полей, воздействующих на антенную систему, необходимы математическая модель поля на источнике его излучения, а также модель трансформации этого поля морской средой, т. е. каналом распространения. Модель гидроакустического поля получается в результате решения волнового уравнения для заданных характеристик источника излучения и граничных условий [33]. Гидроакустический канал распространения, связывающий источник излучения с приемной антенной, существенно влияет на свойства поля, наблюдаемого на раскрытие антенны. Это влияние обусловлено [68] случайными неоднородностями океана, наличием рассеивателей и их движением, морским волнением. Поэтому принято рассматривать гидроакустическое поле звукового давления как случайное пространственно-временное поле. Теория случайных полей [11, 65] во многом аналогична теории случайных процессов. Определим кратко необходимые в дальнейшем вероятностные характеристики полей.

Описание поля с помощью пространственно-временной корреляционной функции. Аргументами функции поля (пространственно-временной функции) является время t и координаты точки наблюдения, определяемой вектором \vec{r} в декартовой системе координат с составляющими x , y и z , т. е. всего четыре параметра. В рамках корреляционной теории поле $x(t, \vec{r})$ описывается двумя моментами – средним и пространственно-временной корреляционной функцией (ПВКФ). Так как среднее значение звукового давления гидроакустического поля равно нулю (поле полностью определяется его флюктуационной компонентой), то ПВКФ поля

$$r(t_1, t_2; \vec{r}_1, \vec{r}_2) = M \{x(t_1, \vec{r}_1)x(t_2, \vec{r}_2)\}. \quad (1.3.1)$$

В общем случае ПВКФ зависит от восьми переменных. Далее будем рассматривать стационарные по времени и однородные по пространству поля. Это означает, что ПВКФ [см. (1.3.1)] такого поля зависит от разности моментов времени $t_2 - t_1 = \tau$ и разности координат точек наблюдения $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{\rho}$. В результате ПВКФ будет зависеть лишь от четырех переменных:

$$r(t_1, t_2; \vec{r}_1, \vec{r}_2) = r(t_2 - t_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1) = r(\tau, \vec{\rho}). \quad (1.3.2)$$

Дальнейшим упрощением статистически однородного поля является изотропное поле, для которого корреляционная функция зависит лишь от модуля вектора $\vec{\rho}$, т. е. $r(\tau, \vec{\rho}) = r(\tau, |\vec{\rho}|)$. Статистически однородное поле, у которого корреляционная функция зависит не только от модуля, но и от направления вектора $\vec{\rho}$, называют анизотропным полем (в отличие от изотропного).

Описание поля с помощью частотно-волнового спектра. Так же как и для случайных процессов, в теории случайных полей большое значение имеет спектральное представление как самих полей, так и их ПВКФ [11]. В основе наиболее простой трактовки спектрального разложения стационарного однородного пространственно-временного поля лежит возможность его представления в виде линейной комбинации монохроматических плоских волн. Такая плоская гармоническая волна (на одной несущей частоте f) в точке \vec{r} в момент времени t (рис. 1.3) определяется выражением

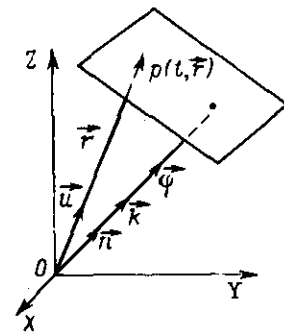


Рис. 1.3

$$p(t, \vec{r}) = \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})] = \exp[j \cdot 2\pi(f t - \vec{\varphi} \cdot \vec{r})]. \quad (1.3.3)$$

Здесь $k = 2\pi\vec{\varphi}$ – волновой вектор с составляющими k_x , k_y и k_z , а $\vec{\varphi}$ – вектор пространственной частоты с составляющими φ_x , φ_y и φ_z . Направление вектора \vec{k} совпадает с направлением вектора единичной длины \vec{n} , нормального волновому фронту, а направление вектора единичной длины \vec{u} – с направлением вектора \vec{r} . Составляющие n_x , n_y и n_z вектора \vec{n} являются направляющими косинусами углов между вектором \vec{n} и осями X , Y , Z . В формуле (1.3.3) $\vec{k} \cdot \vec{r}$ и $\vec{\varphi} \cdot \vec{r}$ – скалярные произведения указанных векторов. Векторы \vec{k} и $\vec{\varphi}$ коллинеарны единичному вектору \vec{n} , а их модули отличаются на 2π . Положение плоской волны определяется с помощью одной координатной оси, которая совпадает с направлением распространения волны.

Введем следующие обозначения: $|\vec{k}| = k$ и $|\vec{\varphi}| = \varphi$. Эти величины связаны между собой зависимостью $k = \omega/c = 2\pi f/c = 2\pi/\lambda$, где c – скорость распространения волны; λ – ее длина; $\varphi = k/(2\pi) = f/c = 1/\lambda$.

Для однородного и стационарного случайного поля $x(t, \vec{r})$ его пространственно-временное спектральное разложение осуществляется на основе четырехмерного преобразования Фурье [11]. В таком случае для пространственно-временных флуктуаций поля $x(t, \vec{r})$ четырехмерное частотно-волновое представление

$$x(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \int X(f, \vec{\varphi}) e^{j \cdot 2\pi(f t - \vec{\varphi} \cdot \vec{r})} df d\varphi_x d\varphi_y d\varphi_z, \quad (1.3.4)$$

где $X(f, \vec{\varphi})$ – пространственно-временная спектральная амплитуда поля. Из формулы (1.3.3) видно, что выражение (1.3.4) определяет произвольное стационарное однородное поле $x(t, \vec{r})$ в виде линейной комбинации плоских волн $p(t, \vec{r})$.

Частотно-волновой спектр (ЧВС) $\Phi(f, \vec{\varphi})$ поля определяется с помощью четырехмерного преобразования Фурье его ПВКФ $r(\tau, \vec{\rho})$

$$\Phi(f, \vec{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \int r(\tau, \vec{\rho}) e^{-j \cdot 2\pi(f \tau - \vec{\varphi} \cdot \vec{\rho})} d\tau d\rho_x d\rho_y d\rho_z, \quad (1.3.5)$$

а переход от ЧВС к ПВКФ выполняется с помощью обратного четырехмерного преобразования Фурье

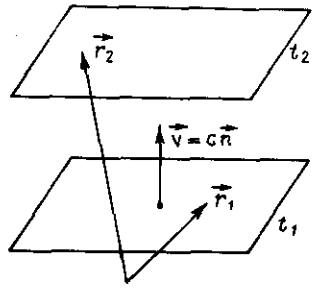


Рис. 1.4

$$r(\tau, \vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \Phi(f, \vec{\varphi}) e^{j \cdot 2\pi (f\tau - \vec{\varphi} \cdot \vec{\rho})} \times d f d \varphi_x d \varphi_y d \varphi_z. \quad (1.3.6)$$

ЧВС $\Phi(f, \vec{\varphi})$ характеризует распределение мощности поля по временным f и пространственным $\vec{\varphi}$ частотам. Как известно, наличие протяженной области близких значений ПВКФ $r(\tau, \vec{\rho})$ по оси τ (области высокой временной когерентности) эквивалентно концентрации спектра $\Phi(f, \vec{\varphi})$ относительно некоторой узкой области по оси f .

Аналогично, наличие протяженной области близких значений $r(\tau, \vec{\rho})$ по осям ρ_x, ρ_y и ρ_z (область высокой пространственной когерентности) эквивалентно концентрации спектра $\Phi(f, \vec{\varphi})$ относительно некоторой узкой области пространственных частот φ_x, φ_y и φ_z (волновых чисел k_x, k_y и k_z). Концентрация спектра в узкой области временных частот позволяет выделить временный процесс в этой области с помощью временной частотной фильтрации. Точно так же, благодаря концентрации спектра в ограниченной области пространственных частот, можно выделить пространственные флуктуации поля с помощью пространственной фильтрации.

Кроме ЧВС $\Phi(f, \vec{\varphi})$ поля, используется также его частотно-пространственный спектр (ЧПС)

$$P(f, \vec{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau, \vec{\rho}) e^{-j \cdot 2\pi f \tau} d\tau = \int \int \int \Phi(f, \vec{\varphi}) e^{-j \cdot 2\pi \vec{\varphi} \cdot \vec{\rho}} \times d\varphi_x d\varphi_y d\varphi_z \quad (1.3.7)$$

— функция временной частоты f и расстояния между точками наблюдения $\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Физически $P(f, \vec{\rho})$ определяет взаимную спектральную плотность двух временных выборок поля, отвечающих точкам наблюдения \vec{r}_2 и \vec{r}_1 , для которых $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{\rho}$. И наконец, используется волновой спектр

$$\Psi(\tau, \vec{\varphi}) = \int \int \int r(\tau, \vec{\rho}) e^{j \cdot 2\pi \vec{\varphi} \cdot \vec{\rho}} d\rho_x d\rho_y d\rho_z = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f, \vec{\varphi}) e^{j \cdot 2\pi f \tau} df, \quad (1.3.8)$$

который при $\tau=0$ характеризует пространственные свойства поля в области пространственных частот (волновых чисел).

Модели некоторых типовых чисел. Первая модель создана для поля, временные изменения которого обусловлены переносом его пространственных неоднородностей с постоянной скоростью \vec{v} , причем сам перенос не изменяет свойств этих неоднородностей („замороженное поле”). Такую модель используют, например, для описания поля с плоским волновым фронтом, перемещающимся со скоростью $\vec{v} = c\vec{n}$, где \vec{n} нормаль

к волновому фронту (рис. 1.4). В соответствии со сказанным свойства „замороженного поля” описываются соотношением

$$x(t, \vec{r}) = x(0, \vec{r} - \vec{n}ct) = x(t - \frac{1}{c} \vec{r} \cdot \vec{n}, 0). \quad (1.3.9)$$

Рассмотрим две точки поля \vec{r}_1 и \vec{r}_2 для двух моментов времени t_1 и t_2 (см. рис. 1.4), причем $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{\rho}$, $t_2 - t_1 = \tau$. Используя первую часть (1.3.9), можем определить ПВКФ через пространственные координаты поля:

$$r(\tau, \vec{\rho}) = M \{ x(t_1, \vec{r}_1) x(t_2, \vec{r}_2) \} = M \{ x(0, \vec{r}_1 - \vec{n}ct_1) x(0, \vec{r}_2 - \vec{n}ct_2) \} = r(\vec{\rho} - \vec{n}c\tau), \quad (1.3.10)$$

а с помощью второй части (1.3.9) — через временные координаты поля:

$$r(\tau, \vec{\rho}) = M \left\{ x\left(t_1 - \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{n}}{c}, 0\right) x\left(t_2 - \frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{n}}{c}, 0\right) \right\} = r\left(\tau - \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{n}}{c}\right) \quad (1.3.11)$$

Найдем ЧВС плосковолнового поля. Для этого подставим в формулу (1.3.5) выражение (1.3.10) и получим

$$\Phi(f, \vec{\varphi}) = \Psi(0, \vec{\varphi}) \delta(f - \vec{\varphi} \cdot \vec{n}c), \quad (1.3.12)$$

где $\Psi(0, \vec{\varphi})$ — волновой спектр [см. (1.3.8)] при $\tau=0$. Если теперь в формулу (1.3.5) подставить выражение (1.3.11), то

$$\Phi(f, \vec{\varphi}) = P(f, 0) \delta\left(\frac{f}{c} n_x - \varphi_x\right) \delta\left(\frac{f}{c} n_y - \varphi_y\right) \delta\left(\frac{f}{c} n_z - \varphi_z\right), \quad (1.3.13)$$

где $P(f, 0)$ — ЧПС [см. (1.3.7)] при $\vec{\rho}=0$. Таким образом, формулы (1.3.12) и (1.3.13) позволяют выразить ЧВС плосковолнового поля (1.3.9) через его волновой или частотный спектры.

ЧПС поля $P(f, \vec{\rho})$ определяется формулой (1.3.7) после подстановки туда выражений (1.3.11) или (1.3.13):

$$P(f, \vec{\rho}) = P(f, 0) e^{-j \cdot 2\pi \frac{f}{c} \vec{\rho} \cdot \vec{n}}, \quad (1.3.14)$$

а волновой спектр $\Psi(\tau, \vec{\varphi})$ определяется формулой (1.3.8) после подстановки туда выражений (1.3.10) или (1.3.12):

$$\Psi(\tau, \vec{\varphi}) = \Psi(0, \vec{\varphi}) e^{-j \cdot 2\pi \vec{\varphi} \cdot \vec{n}c\tau}. \quad (1.3.15)$$

Рассмотрим второй важный пример модели поля, образованного множеством независимых точечных источников, расположенных на сфере большого радиуса и излучающих каждый некоррелированные между собой плоские волны – модель поля дальних помех. Такая модель рассмотрена в ряде работ [38, 58, 90]. В последней работе получено выражение для ЧПС [см. (1.3.7)] $P(f, \vec{\rho})$ такого поля, представленное разложением в ряд по системе спецфункций. В простейшем случае, когда спектральная плотность источников излучения не зависит от их углового положения, – это изотропное поле, а поэтому его вероятностные характеристики определяются лишь модулем $|\vec{\rho}|$ вектора $\vec{\rho}$, который будем обозначать через ρ . Важной характеристикой такого изотропного поля является его нормированная пространственная корреляционная функция, равная $\sin k\rho/(k\rho)$, где $k=2\pi f/c$. В таком случае ЧПС изотропного поля [см. (1.3.7)] определяется выражением

$$P(f, \rho) = g(f) \frac{\sin(2\pi f\rho/c)}{2\pi f\rho/c}, \quad (1.3.16)$$

где $g(f) = P(f, 0)$ – спектральная плотность изотропного поля. Спектр $P(f, \rho)$ имеет смысл взаимной спектральной плотности для двух выборок поля, взятых из его точек, расположенных на расстоянии ρ . ПВКФ изотропного поля определяется с помощью обратного Фурье-преобразования ЧПС (1.3.16), в результате ПВКФ

$$r(\tau, \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} g(f) \frac{\sin(2\pi f\rho/c)}{2\pi f\rho/c} e^{j \cdot 2\pi f\tau} df, \quad (1.3.17)$$

а ЧВС изотропного поля – с помощью прямого Фурье-преобразования ЧПС (1.3.16) по пространству

$$\Phi(f, \varphi) = g(f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f\rho/c)}{2\pi f\rho/c} e^{j \cdot 2\pi f\rho d\rho}, \quad (1.3.18)$$

где для изотропного поля [11] вектор пространственной частоты $\vec{\varphi}$ характеризуется лишь его модулем $|\vec{\varphi}| = \varphi$. Интеграл, входящий в выражение (1.3.18), определяет волновой спектр поля [см. (1.3.8)] при $\tau=0$, т. е. функцию $\Psi(0, \varphi)$. Вычисление этого интеграла дает

$$\Psi(0, \varphi) = \begin{cases} \frac{c}{2|\varphi|} & \text{при } -\frac{|\varphi|}{c} \leq \varphi \leq \frac{|\varphi|}{c}, \\ 0 & \text{при } \frac{|\varphi|}{c} < \varphi < -\frac{|\varphi|}{c}. \end{cases} \quad (1.3.19)$$

Поэтому ЧВС изотропного поля [см. (1.3.18)]

$$\Phi(f, \varphi) = g(f) \Psi(0, \varphi), \quad (1.3.20)$$

где функция $\Psi(0, \varphi)$ определяется формулой (1.3.19). Волновой спектр изотропного поля, определяемый для фиксированной частоты f_0 функцией (1.3.20) $\Psi(0, \varphi) = \Phi(f_0, \varphi)/g(f_0)$ (рис. 1.5), аналогичен частотному спектру временного полосового случайного процесса с постоянным уровнем спектра в конечном диапазоне частот $|f| \leq f_0$. В обоих случаях изотропное поле и полосовой процесс образованы совокупностью пространственных и временных гармоник, заданных в конечных интервалах пространственных и временных частот.

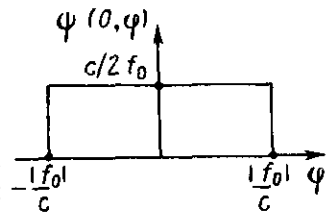


Рис. 1.5

Рассмотренные выше две модели лишь в первом приближении отвечают простейшим представлениям полей плосковолнового сигнала и изотропного шума. Особенно сложным является учет многообразных физических факторов, определяющих свойства шума морской среды [68], не являющегося изотропным. В статье [90] построена модель поля, учитывающая его как вертикальную, так и горизонтальную анизотропию. Приведем выражение [90] взаимной спектральной плотности (1.3.7) шумового поля волнения моря для двух точек, расположенных на расстоянии ρ друг от друга на линии, ориентированной в сферической системе координат (см. рис. 1.6) углом места $\beta = \gamma$:

$$P(f; \rho, \gamma) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[J_0 \left(\frac{2\pi f\rho}{c} \sin \gamma \sin \beta \right) F(f, \beta) \times \right. \\ \left. \times \exp \left(j \frac{2\pi f\rho}{c} \cos \gamma \cos \beta \right) \sin \beta \right] d\beta, \quad (1.3.21)$$

где $J_0(\dots)$ – функция Бесселя первого рода; $F(f, \beta)$ – плотность распределения излучателей на частоте f по углу места β (эта плотность включает в себя ХН излучателей). Выражение (1.3.21) не содержит азимутальный угол α , так как поле шумов волнения моря симметрично относительно вертикальной оси. Выражение (1.3.21) существенно упрощается при $\gamma=0$ и $\pi/2$.

Оценка частотно-волнового спектра поля на основе выборочного спектра его реализаций. Спектр поля может быть оценен на основе его реализаций аналогично тому, как это делается для случайных процессов. Особенности оценки ЧВС рассмотрим на простейшем примере, когда реализация поля $x(t, \vec{r})$ задана на отрезке длины L , расположенном на оси ОУ так, что $y \in (-L/2, L/2)$, и интервале времени T так, что $t \in (-T/2, T/2)$, т. е. реализация поля двумерна – $x(t, y)$. Для оценки ЧВС поля необходимо в данном случае определить двумерное Фурье-изображение реализации поля $x(t, y)$:

$$\mathcal{H}(f, \varphi_y) = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, y) e^{-j 2\pi (ft - \varphi_y y)} dt dy, \quad (1.3.22)$$

где φ_y — проекция вектора $\vec{\varphi}$ пространственной частоты на ось ОУ (структура выражений (1.3.5) и (1.3.22) идентична).

Аналогично выборочному частотному спектру случайного процесса (1.1.8) можно определить выборочный ЧВС случайного поля

$$\mathcal{L}(f, \varphi_y) = \frac{1}{TL} |\mathcal{K}(f, \varphi_y)|^2, \quad (1.3.23)$$

причем, так же как для случайных функций (1.1.11),

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ L \rightarrow \infty}} M[\mathcal{L}(f, \varphi_y)] &= \Phi_y(f, \varphi_y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau, \rho_y) e^{-j \cdot 2\pi(f\tau - \varphi_y \rho_y)} d\tau d\rho_y. \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

Выражение (1.3.24) аналогично (1.3.5) для поля, заданного на оси ОУ. Соотношение, обратное (1.3.24) и подобное (1.3.6),

$$r(\tau, \rho_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_y(f, \varphi_y) e^{j \cdot 2\pi(f\tau - \varphi_y \rho_y)} df d\varphi_y \quad (1.3.25)$$

определяет ПВКФ $r(\tau, \rho_y)$ поля через ЧВС $\Phi_y(f, \varphi_y)$. Спектр $\Phi(f, \vec{\varphi})$ четырехмерного (объемного) поля и спектр $\Phi_y(f, \varphi_y)$ (1.3.24) двумерного (заданного на оси ОУ) поля связаны зависимостью

$$\Phi_y(f, \varphi_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f, \vec{\varphi}) d\varphi_x d\varphi_z \quad (1.3.26)$$

В заключение остановимся на важном для практики случае, когда ЧВС поля оценивается на выходах элементов антенной решетки (АР) по дискретизированным во времени реализациям поля. Положим, что расстояние между элементами АР равно d , а число их равно M , так что $L = Md$; примем шаг временной дискретизации равным Δ , а число дискрет N , так что $T = N\Delta$. Такое задание L и T удобно для анализа, хотя при этом расстояние между крайними элементами АР равно $L - d$, а интервал между крайними временными выборками равен $T - \Delta$, однако при периодическом продолжении пространственной и временной реализаций можно принять их периоды равными L и T соответственно. Следовательно, реализация поля $x(t, y)$ задается для дискретных значений аргументов $t = n\Delta$ и $y = md$, где $n = -N/2, \dots, 0, 1, \dots, N/2 - 1$ и $m = -M/2, \dots, 0, 1, M/2 - 1$. В таком случае, аналогично (1.3.22), находим двумерное Фурье-изображение реализации поля $x(n\Delta, md)$

$$\mathcal{K}^*(f, \varphi_y) = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} x(n\Delta, md) e^{-j \cdot 2\pi(f\Delta n - \varphi_y md)}, \quad (1.3.27)$$

где в обозначении изображения две звездочки сверху указывают на то, что оно получено для реализации поля $x(n\Delta, md)$, дискретной по времени и пространству. Подобно (1.3.23), можно определить выборочный спектр

$$\mathcal{L}^*(f, \varphi_y) = \frac{1}{NM} |\mathcal{K}^*(f, \varphi_y)|^2, \quad (1.3.28)$$

причем, так же как для дискретных последовательностей (1.1.18),

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty}} M[\mathcal{L}^*(f, \varphi_y)] &= \Phi_y^*(f, \varphi_y) = \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} r(\nu\Delta, \mu d) e^{-j \cdot 2\pi(f\Delta\nu - \varphi_y d\mu)}, \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

где $\nu = n_2 - n_1$ и $\mu = m_2 - m_1$. Соотношение, обратное (1.3.29), аналогично (1.1.13), но лишь для двумерного случая

$$r(\nu\Delta, \mu d) = \Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} d \int_{-1/2d}^{1/2d} \Phi_y^*(f, \varphi_y) e^{j \cdot 2\pi(f\Delta\nu - \varphi_y d\mu)} df d\varphi_y \quad (1.3.30)$$

Частотно-волновые спектры $\Phi_y(f, \varphi_y)$ (1.3.24) и $\Phi_y^*(f, \varphi_y)$ (1.3.29) связаны между собой зависимостью, подобной (1.1.14), но для двумерного случая [17]

$$\Phi_y^*(f, \varphi_y) = \frac{1}{\Delta d} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \Phi_y\left(f + \frac{r}{\Delta}, \varphi_y + \frac{s}{d}\right). \quad (1.3.31)$$

Таким образом, дискретизация непрерывной реализации поля $x(t, y)$ по пространственной координате y с шагом d приводит к транспонированию высоких пространственных частот φ_y в основную полосу $(-1/2d, 1/2d)$, точно так же, как и дискретизация по временной координате t с шагом Δ приводит к транспонированию высоких временных частот f в основную полосу $(-1/2\Delta, 1/2\Delta)$ и, следовательно, к искажению исходного спектра $\Phi_y(f, \varphi_y)$. Частотно-волновой спектр $\Phi_y^*(f, \varphi_y)$ есть периодическая функция как временной, так и пространственной частот f и φ_y , причем по первой координате величина этого периода равна $1/\Delta$, а по второй — $1/d$. Если спектр $\Phi_y(f, \varphi_y)$ таков, что по временной частоте f он ограничен сверху частотой f_B и $\Delta \leq 1/2 f_B$, а по пространственной частоте $\varphi_y = 1/\lambda = f/c$ спектр ограничен частотой f_B/c , причем $d \leq c/2f_B = \lambda_{\min}/2$, то, как следует из соотношения (1.3.31), в этом случае

$$\Phi_y^*(f, \varphi_y) = \frac{1}{\Delta d} \Phi_y(f, \varphi_y), \quad (1.3.32)$$

т. е. как временная, так и пространственная дискретизация поля не искажают его ЧВС. Заметим, что при выполнении этих условий, аналогично формуле (1.1.16),

$$\mathcal{K}(f, \varphi_y) \approx \Delta d \mathcal{K}^*(f, \varphi_y); \quad \mathcal{L}(f, \varphi_y) \approx \Delta d \mathcal{L}^*(f, \varphi_y). \quad (1.3.33)$$

1.4. Вероятностное описание реализаций пространственно-временного поля на выходе элементов антенной решетки

Если зафиксировать положение элементов АР в системе координат, связанной с антенной, то напряжения на выходе элементов $x_m(t)$, где $m=0, 1, \dots, M-1$; $0 \leq t \leq T$, будут представлять собой пространственно-временные реализации случайного поля на элементах АР. Это та исходная информация, которая задается на входе СПВО. Для вероятностного описания реализаций поля на элементах АР можно воспользоваться изложенными выше положениями теории многомерных случайных процессов и случайных пространственно-временных полей. Будем считать далее, как принято в гидроакустике [68], что рассматриваемые поля гауссовские, а поэтому для вероятностного описания их реализаций достаточно знать ПВКФ этих полей [см. (1.3.2)], ЧПС [см. (1.3.7)] или ЧВС [см. (1.3.5)]. Соответственно будем говорить, что реализации поля заданы в областях: $\{t, \vec{r}\}$ — время и пространственные координаты; $\{f, \vec{r}\}$ — временная частота и пространственные координаты; $\{f, \vec{\varphi}\}$ — временная и пространственные частоты.

Для описания геометрической конфигурации АР и задания координат ее элементов будем пользоваться двумя системами координат — декартовой и сферической (рис. 1.6). Здесь \vec{u} — вектор единичной длины с направляющими косинусами: $u_x = \sin \beta \cos \alpha$, $u_y = \sin \beta \sin \alpha$, $u_z = \cos \beta$, где α и β азимут и угол места, $-\pi < \alpha \leq \pi$, $0 < \beta \leq \pi$; $\vec{r} = \vec{u}r$, где $r = |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Ограничимся рассмотрением двумерных и одномерных решеток — плоских и линейных. Будем полагать, что плоская АР расположена в первом квадранте YOZ (рис. 1.7), где M_y и M_z — число элементов по горизонтали и вертикали, d_y и d_z — соответствующие расстояния между элементами. В случае линейной АР будем считать, что она расположена на оси OY.

Вероятностное описание реализаций поля в области $\{t, \vec{r}\}$. Рассмотрим линейную АР с M элементами и межэлементным расстоянием d . В таком случае реализациями поля являются компоненты $x_m(t)$ M -мерного случайного процесса, где $m=0, 1, \dots, M-1$. Номер m -й реализации отвечает координате $y = md$ m -го элемента АР. Временную реализацию $x_m(t)$, заданную на интервале $(0, T)$, будем представлять дискретными отсчетами $x_m(l\Delta)$ в точках $t = l\Delta$, где Δ — интервал дискретизации; $l=1, 2, \dots, L$ (такой выбор временных отсчетов, исключаяющий $l=0$, удобен для

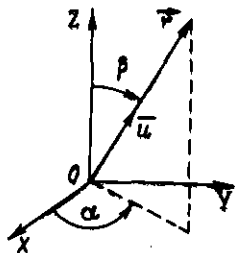


Рис. 1.6

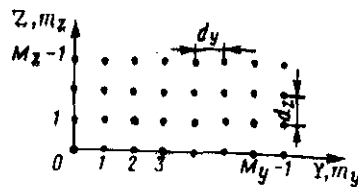


Рис. 1.7

описания обработки информации в реальном времени); далее для упрощения записи будем также использовать обозначение $x_m(l)$. На рис. 1.8 дана иллюстрация рассматриваемого случая. Здесь четырехмерной области $\{t, \vec{r}\}$ соответствует двумерная область $\{t, y\}$, где $t = l\Delta$, $y = md$. Имеется всего ML выборочных значений $x_m(l)$, где $m=0, 1, \dots, M-1$; $l=1, 2, \dots, L$. Для плоской АР представление реализаций поля в области $\{t; y, z\}$ можно выполнить аналогично рассмотренному выше, если ввести сквозную нумерацию элементов.

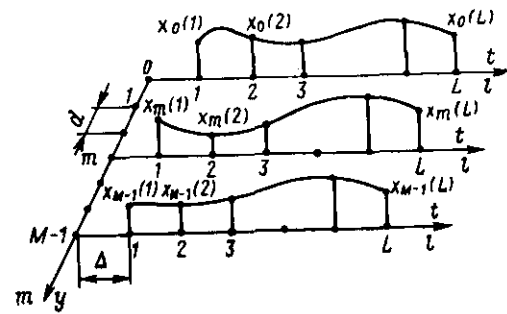


Рис. 1.8

Далее удобно ввести два вектора. Вектор $\mathcal{X}(l) = [x_0(l), x_1(l), \dots, x_{M-1}(l)]^T$ имеет M составляющих — выборочные значения $x_m(l\Delta)$ реализаций поля $x_m(t)$ на элементах АР в момент времени $t = l\Delta$. Второй вектор \mathcal{X} имеет LM составляющих — выборочные значения $x_m(l\Delta)$, взятые в таком порядке: M значений $x_m(1)$, далее M значений $x_m(2)$ и т. д., наконец, M значений $x_m(L)$. Таким образом, вектор \mathcal{X} с LM составляющими образован L векторами $\mathcal{X}(l)$ с M составляющими, т. е. $\mathcal{X} = [\mathcal{X}^T(1), \mathcal{X}^T(2), \dots, \mathcal{X}^T(L)]^T$. Вектор \mathcal{X} определяет LM выборочных значений пространственно-временной реализации поля на элементах АР, взятых с шагом d по пространству и с шагом Δ по времени.

Будем считать, что поле является гауссовым, а поэтому вектор \mathcal{X} имеет LM -мерное гауссово распределение

$$f(\mathcal{X}) = [(2\pi)^{ML} \det R_x]^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathcal{X} - \hat{\mathcal{A}}_x)^T R_x^{-1} (\mathcal{X} - \hat{\mathcal{A}}_x) \right]; \quad (1.4.1)$$

где математическое ожидание $\hat{\mathcal{A}}_x$ и корреляционная матрица R_x вектора \mathcal{X} равны

$$\hat{\mathcal{A}}_x = M \{\mathcal{X}\}; \quad R_x = M \{(\mathcal{X} - \hat{\mathcal{A}}_x)(\mathcal{X} - \hat{\mathcal{A}}_x)^T\}. \quad (1.4.2)$$

Уточним особенности структуры вектора $\hat{\mathcal{A}}_x$ и матрицы R_x , определяемой блочной структурой вектора \mathcal{X} . Вектор $\hat{\mathcal{A}}_x$ состоит из L блоков с M компонентами $a_m(l) = M \{x_m(l)\}$, причем для данной величины l величина m принимает значения $0, 1, \dots, M-1$. Аналогично этому матрица $R_x = M \{\mathcal{X}\mathcal{X}^T\}$ является блочной матрицей, состоящей из $L \times L$ матриц-блоков $R_x(l, k) = M \{\mathcal{X}(l)\mathcal{X}^T(k)\}$, каждая размером $M \times M$, где $l, k = 1, 2, \dots, L$. Таким образом блочная матрица

$$R_x = \begin{bmatrix} R_x(1,1) & R_x(1,2) & \dots & R_x(1,L) \\ R_x(2,1) & R_x(2,2) & \dots & R_x(2,L) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(L,1) & R_x(L,2) & \dots & R_x(L,L) \end{bmatrix} \quad (1.4.3)$$

где матрица-блок $R_x(l, k)$ образована элементами матричной корреляционной функции (1.1.1) $R_x(t_1, t_2)$ M -мерного случайного процесса, взятые для моментов времени $t_1 = l \Delta$ и $t_2 = k \Delta$, т. е. значениями взаимных корреляционных функций $r_{mn}(t_1, t_2)$. $ML \times ML$ таких величин для $m, n = 0, 1, \dots, M-1$ и $l, k = 1, 2, \dots, L$ образуют матрицу R_x .

Сама же матричная корреляционная функция $R_x(t_1, t_2)$ (размером $M \times M$) образована значениями ПВКФ поля [см. (1.3.1)] $r(t_1, t_2; \vec{r}_1, \vec{r}_2)$, взятыми для момента $t_1 = l \Delta$ в точке с координатами \vec{r}_1 , где расположен элемент с номером m и для момента $t_2 = k \Delta$ в точке \vec{r}_2 , где расположен элемент с номером n .

Вероятностное описание реализаций поля в области $\{f, \vec{r}\}$. Переход от представления информации в области $\{t, \vec{r}\}$ к ее представлению в области $\{f, \vec{r}\}$ осуществляется путем вычисления Фурье-изображений $X_m(f)$ [см. (1.1.9)] временных реализации $x_m(t)$ для ряда дискретных значений частоты f_k . Здесь удобно центрированный процесс $x_m(t)$ задавать на интервале $t \in (-T/2, T/2)$, а не на интервале $t \in (0, T)$, как это было выше для области $\{t, \vec{r}\}$ (взаимный переход очевиден).

Целесообразность рассмотрения частотной области вызвана следующими обстоятельствами: во-первых, широким применением обработки цифровой информации в частотной области на основе алгоритма БПФ; во-вторых, удобством использования частотных представлений для случая, когда длительность T временной реализации случайного процесса $x_m(t)$ существенно больше его интервала корреляции $\tau_{кор}$, а поэтому можно считать, что изображения $X_m(f_k)$ и $X_n(f_q)$ при $f_q \neq f_k$ практически не коррелированы. Это условие согласуется с неравенством $2TF \gg 1$, где F — ширина полосы процесса, эквивалентного $x_m(t)$ по средней мощности. Физически условие $T \gg \tau_{кор}$ означает, что длительность T временной реализации $x_m(t)$ достаточна для того, чтобы успели проявиться вероятностные свойства случайного процесса. Этот подход дает возможность существенно упростить исследования, сохранив основную физическую суть явлений.

Корреляционный момент изображений $X_m(f_k)$ и $X_n(f_q)$ в соответствии с формулой (1.1.9) есть

$$M\{\bar{X}_m(f_k) X_n(f_q)\} = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} r_{mn}(t_2 - t_1) e^{j \cdot 2\pi (f_k t_1 - f_q t_2)} dt_1 dt_2.$$

Нетрудно показать, что величина этого момента определяется следующим эквивалентным выражением:

$$\begin{aligned} M\{\bar{X}_m(f_k) X_n(f_q)\} &= \int_{-T}^T r_{mn}(\tau) \frac{\sin[\pi(f_q - f_k)(T - |\tau|)]}{\pi(f_q - f_k)} \times \\ &\times \exp[-j \pi(f_k + f_q)\tau] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g_{mn}(f) \frac{\sin \pi(f_k - f)T}{\pi(f_k - f)} \times \\ &\times \frac{\sin \pi(f_q - f)T}{\pi(f_q - f)} df, \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

где $g_{mn}(f)$ — взаимная спектральная плотность, соответствующая взаимной корреляционной функции $r_{mn}(\tau)$. Отсюда видно, что при $f_q = f_k$ и $T \gg \tau_{кор}$ [или когда на интервале частоты порядка $1/T$ спектральная плотность $g_{mn}(f)$ изменяется мало] выражение (1.4.4) определяет величину, близкую к $g_{mn}(f_k)$, а при $f_q \neq f_k$ оно близко к нулю. Поэтому приближенно.

$$M\{\bar{X}_m(f_k) X_n(f_q)\} \approx T g_{mn}(f_k) \frac{\sin \pi(f_k - f_q)T}{\pi(f_k - f_q)T}, \quad (1.4.5)$$

или в явном виде

$$M\{\bar{X}_m(f_k) X_n(f_q)\} \approx \begin{cases} T g_{mn}(f_k) & \text{при } f_q = f_k; \\ 0 & \text{при } f_q \neq f_k. \end{cases} \quad (1.4.6)$$

Иллюстрируем сказанное простейшим примером. С помощью первой формулы (1.4.4) были выполнены расчеты для корреляционной функции „треугольного вида” $r(\tau) = 1 - |\tau|/\tau_{кор}$. Уже для отношения $T/\tau_{кор} = 5$ величины корреляционных моментов изображений для несовпадающих частот $f_q \neq f_k$ (кратных величине $1/T$), отнесенные к максимальному значению этого момента при $q = k = 0$, составляют примерно 5%.

Возвращаясь к вопросу представления изображения $X_m(f_k)$ для дискретных частот f_k , определим число последних следующим образом. Положим, что полоса частот многомерного случайного процесса, порожденного полем на элементах АР, ограничена сверху частотой f_B , т. е. $|f| \leq f_B$. Разделим частотную полосу $2f_B$ на N частей так, что $f_k = k \times 2f_B/N$, $k = -N/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2-1$, т. е. число дискретных значений частот f_k равно N . Заметим, что если взять $N = 2Tf_B$, то $f_k = k/T$. Учтем также свойство изображения $X_m(f)$ вещественной функции $x_m(t)$, в соответствии с которым $\text{Re} X_m(-f) = \text{Re} X_m(f)$ и $\text{Im} X_m(-f) = -\text{Im} X_m(f)$. По что для дискретных величин $f_k = k/T$ проиллюстрировано на рис. 1.9. Поэтому изображение $X_m(f_k)$ определяется $N/2+1$ составляющими $\text{Re} X_m(f_k)$ при $k = 0, 1, \dots, N/2$ и $N/2-1$ составляющими $\text{Im} X_m(f_k)$ при $k = 1, 2, \dots, N/2-1$, т. е. всего N величинами. В связи с этим будем использовать $N/2+1$ значений частоты f_k при $k = 0, 1, \dots, N/2$.

Далее удобно ввести два вектора. Первый вектор $X(f_k) = [X_0(f_k), X_1(f_k), \dots, X_{M-1}(f_k)]^T$ с M комплексными составляющими $X_m(f_k)$. Второй вектор X имеет $M(N/2+1)$ комплексных составляющих — значений $X_m(f_k)$, взятых в таком порядке: M величин $X_m(f_0)$, далее M величин $X_m(f_1)$ и т. д., наконец, M величин $X_m(f_{N/2})$. Таким образом, вектор X с $M(N/2+1)$ комплексными составляющими образован $N/2+1$ векторами

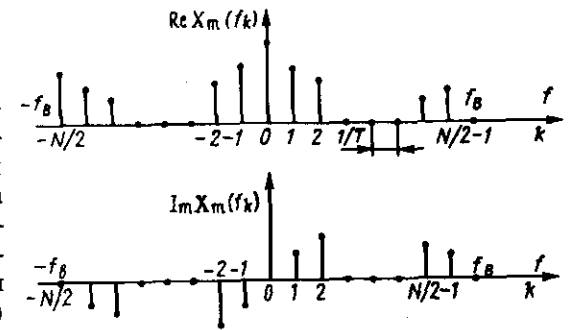


Рис. 1.9

$X(f_k)$ (каждый с M составляющими), т. е. $X = [X^T(f_0), X^T(f_1), \dots, X^T(f_{N/2})]^T$. Вектор X определяет $M(N/2+1)$ комплексных выборочных значений пространственно-временной реализации поля на элементах АР в области $\{f, \vec{r}\}$.

Будем считать, что поле является гауссовым. В таком случае вектор X с $M(N/2+1)$ комплексными составляющими $X_m(f_k)$ [с MN вещественными составляющими $\text{Re} X_m(f_k)$ и $\text{Im} X_m(f_k)$] имеет распределение [7]

$$f(X) = [\pi^{M(N/2+1)} \det G_x]^{-1} \exp[-(X - A_x)^T G_x^{-1} (\bar{X} - \bar{A}_x)], \quad (1.4.7)$$

где математическое ожидание A_x и корреляционная матрица G_x равны

$$A_x = M \{X\}; \quad G_x = M \{(\bar{X} - \bar{A}_x)(X - A_x)^T\}, \quad (1.4.8)$$

причем дифференциалу распределения (1.4.7) отвечает произведение дифференциалов $d[\text{Re} X_m(f_k)] d[\text{Im} X_m(f_k)]$ для всех m и k [для дальнейшего использования удобно принять определение матрицы G_x в виде (1.4.8), что приводит к комплексно сопряженной по отношению к [7] квадратичной форме в распределении (1.4.7)]. В (1.4.8) A_x есть $M(N/2+1)$ -мерный вектор, состоящий из блоков $-N/2+1$ векторов $A_x(f_k)$ с M компонентами. Его m -я компонента есть Фурье-изображение математического ожидания процесса $x_m(t)$, вычисленное для частоты f_k . Матрица G_x имеет размер $M(N/2+1) \times M(N/2+1)$. Так как $M(N/2+1)$ -мерный вектор X образован $N/2+1$ блоками $-M$ -мерными векторами $X(f_k)$, то нетрудно видеть, что эрмитова матрица G_x является блочной матрицей, состоящей из блоков $-$ матриц $G_x(k_1, k_2) = M \{[\bar{X}(f_{k_1}) - \bar{A}_x(f_{k_1})][X(f_{k_2}) - A_x(f_{k_2})]^T\}$ размером $M \times M$. В силу условия (1.4.6) таких блоков $N/2+1$ и все они расположены по главной диагонали. Таким образом, блочная матрица

$$G_x = \begin{bmatrix} G_x(0,0) & & & 0 \\ & G_x(1,1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & G_x\left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (1.4.9)$$

Элементы матриц-блоков $G_x(k, k)$ те же, что и соответствующие элементы спектральной матрицы $G_x(f)$ [см. (1.1.5)], взятые для частоты f_k , причем в соответствии с выражением (1.4.6) каждый элемент матрицы $G_x(f_k)$ должен быть умножен на величину T . Сама же спектральная матрица $G_x(f_k)$ (размером $M \times M$) образована значениями частотного спектра поля $P(f, \vec{p})$ [см. (1.3.7)] — взаимными спектральными плотностями $g_{mn}(f_k)$ [см. (1.1.5)] реализаций поля $x_m(t)$ и $x_n(t)$ на выходе m -го элемента с координатами \vec{r}_1 и n -го элемента с координатами $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{p}$. Таким образом матрицы-блоки, образующие матрицу (1.4.9), с учетом формулы (1.4.6) определяются равенством $G_x(k, k) = T G_x(f_k)$. В результате плотность распределения вектора X [см. (1.4.7)] может быть выражена как произведение $N/2+1$ плотностей распределения векторов $X(f_k)$ с M компонентами. Из формулы (1.4.7) получим

$$f(X) = [(\pi T)^{M(N/2+1)} \prod_{k=0}^{N/2} \det G_x(f_k)]^{-1} \times \exp \left\{ -\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N/2} [X(f_k) - A_x(f_k)]^T \times G_x^{-1}(f_k) [\bar{X}(f_k) - \bar{A}_x(f_k)] \right\}. \quad (1.4.10)$$

Рассмотрим теперь особенности представления поля в области $\{f, \vec{r}\}$, если используются изображения $\hat{X}_m(f)$ [см. (1.1.15)] дискретных реализаций $x_m(n\Delta)$. Нетрудно показать, что, подобно (1.4.4),

$$M \{ \bar{\hat{X}}_m(f_k) \hat{X}_n(f_q) \} = \Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} \hat{g}_{mn}(f) \frac{\sin \pi(f_k - f)T}{\sin \pi(f_k - f)\Delta} \frac{\sin \pi(f_q - f)T}{\sin \pi(f_q - f)\Delta} df,$$

где взаимная спектральная плотность $\hat{g}_{mn}(f)$ определяется формулой (1.1.14). Будем полагать, что спектральные плотности $g_{mn}(f)$ непрерывных процессов ограничены частотой f_B и $\Delta \leq 1/2 f_B$. В таком случае $\hat{g}_{mn}(f) = (1/\Delta) g_{mn}(f)$ [см. (1.1.14)]. Если учесть это равенство, то при выполнении условия $T \gg \tau_{\text{кор}}, mn$,

$$M \{ \bar{\hat{X}}_m(f_k) \hat{X}_n(f_q) \} \approx \begin{cases} N g_{mn}(f) & \text{при } f_q = f_k; \\ 0 & \text{при } f_q \neq f_k. \end{cases}$$

В результате плотность распределения вектора $X(f_k)$, составляющие которого теперь есть изображения $\hat{X}_m(f_k)$, будут определяться выражением вида (1.4.10), где нужно лишь величину T заменить на N .

Вероятностное описание реализаций поля в области $\{f, \vec{\varphi}\}$. Использование частотно-волновых представлений для описания реализаций поля на элементах АР весьма удобно, так как оно в концентрированном виде содержит всю информацию о временных и пространственных свойствах поля.

Рассмотрим особенности использования частотно-волнового описания поля на примере линейной АР, расположенной по оси OY и имеющей M элементов. Реализации поля $x_m(t) = x(t, md)$ на элементах АР определены для $t \in (-T/2, T/2)$ и $y = md$, где $m = -M/2, \dots, 0, 1, \dots, M/2-1$. В этом случае двумерное Фурье-изображение реализации поля является функцией двух переменных — временной частоты f и проекции φ_y вектора пространственной частоты $\vec{\varphi}$ на ось OY . Следовательно,

$$\hat{\mathcal{H}}^*(f, \varphi_y) = \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, md) e^{-j \cdot 2\pi (ft - \varphi_y dm)} dt, \quad (1.4.11)$$

где для отличия от двумерного изображения $\mathcal{H}(f, \varphi_y)$ (1.3.22) непрерывных реализаций поля $x_m(t) = x(t, y)$ используется сверху звездочка.

Заметим, что изображение $\mathcal{X}^*(f, \varphi_y)$ есть Фурье-преобразование по пространству изображения $X_m(f)$ (1.1.9), т. е. комплексной функции, а поэтому вещественная и мнимая части $\mathcal{X}^*(f, \varphi_y)$ не являются соответственно четной и нечетной функциями пространственной частоты φ_y , как это имеет место в отношении изображения $X_m(f)$.

Далее, для вероятностного описания реализаций поля в области $\{f, \varphi_y\}$ перейдем к дискретным значениям частот f и φ_y . Примем значения f кратными величине $1/T$, т. е. $f_k = k/T$, где $k = -N/2, \dots, 0, 1, \dots, N/2-1$. Аналогичным образом поступим в отношении проекции пространственной частоты φ_y , используя для этого интервал $L = Md$ пространственного задания реализаций поля. Тогда дискретными значениями φ_y будут величины $\varphi_y, r = r/L$, где примем $r = -M/2, \dots, 0, 1, \dots, M/2-1$ (далее, для упрощения записи, у величины φ_y, r сохраним один индекс r , т. е. будем писать φ_r).

Найдем корреляционный момент двумерных изображений $\mathcal{X}^*(f, \varphi_r)$ и $\mathcal{X}^*(f_q, \varphi_i)$ для значений временных f_k и f_q и пространственных $-\varphi_r$ и φ_i частот. В соответствии с формулами (1.4.11) и (1.3.2),

$$M \left\{ \overline{\mathcal{X}^*(f_k, \varphi_r)} \mathcal{X}^*(f_q, \varphi_i) \right\} = \Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k, f_q; \varphi_r, \varphi_i) = \\ = \sum_{m_1 = -M/2}^{M/2-1} \sum_{m_2 = -M/2}^{M/2-1} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} r [t_2 - t_1, (m_2 - m_1)d] \times \\ \times e^{j \cdot 2\pi [f_k t_1 - f_q t_2 - (\varphi_r m_1 - \varphi_i m_2)d]} dt_1 dt_2, \quad (1.4.12)$$

где $r [t_2 - t_1; (m_2 - m_1)d]$ — ПВКФ поля, определенная для точек пространства $y = md$ на оси OY , где расположена АР. Тогда из выражений (1.3.5) и (1.3.24) следует, что ЧВС стационарного однородного поля

$$\Phi_y^*(f, \varphi_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\mu = -\infty}^{\infty} r(\tau, \mu d) e^{-j \cdot 2\pi (f\tau - \varphi_y \mu d)} d\tau, \quad (1.4.13)$$

где $\tau = t_2 - t_1$ и $\mu = m_2 - m_1$. Соотношение, обратное (1.4.13), следует из (1.3.6) и (1.3.25) с учетом дискретного задания координаты y :

$$r(\tau, \mu d) = \int_{-\infty}^{\infty} d \int_{-1/2d}^{1/2d} \Phi_y^*(f, \varphi_y) e^{j \cdot 2\pi (f\tau - \varphi_y \mu d)} df d\varphi_y. \quad (1.4.14)$$

Подставив (1.4.14) при $\tau = t_2 - t_1$ и $\mu = m_2 - m_1$ в формулу (1.4.12), находим

$$\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k, f_q; \varphi_r, \varphi_i) = \exp [j \pi (\varphi_r - \varphi_i) d] \int_{-1/2d}^{1/2d} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_y^*(f, \varphi_y) \times \\ \times \frac{\sin \pi T (f_k - f)}{\pi (f_k - f)} \frac{\sin \pi T (f_q - f)}{\pi (f_q - f)} \frac{\sin \pi L (\varphi_r - \varphi_y)}{\sin \pi d (\varphi_r - \varphi_y)} \times \\ \times \frac{\sin \pi L (\varphi_i - \varphi_y)}{\sin \pi d (\varphi_i - \varphi_y)} df d\varphi_y. \quad (1.4.15)$$

Связь ЧВС $\Phi_{\mathcal{X}}^*(f, \varphi_y)$ и $\Phi_y(f, \varphi_y)$ дискретной и соответствующей ей непрерывной реализаций поля подобна зависимости (1.1.14):

$$\Phi_y^*(f, \varphi_y) = \frac{1}{d} \sum_{s = -\infty}^{\infty} \Phi_y \left(f, \varphi_y + \frac{s}{d} \right), \quad (1.4.16)$$

где в соответствии с (1.3.5) [и (1.3.24) при $\rho_y = y$]

$$\Phi_y(f, \varphi_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau, y) e^{-j \cdot 2\pi (f\tau - \varphi_y y)} d\tau dy. \quad (1.4.17)$$

Если спектр $\Phi_y(f, \varphi_y)$ по оси пространственных частот $\varphi_y = 1/\lambda = f/c$ ограничен величиной f_B/c , где f_B — верхняя временная частота, $d \leq c/2f_B = \lambda_{\min}/2$, то из зависимости (1.4.16) подобно (1.3.32) следует, что

$$\Phi_{\mathcal{X}}^*(f, \varphi_y) = \frac{1}{d} \Phi_y(f, \varphi_y). \quad (1.4.18)$$

Проанализируем свойства корреляционного момента [см. (1.4.15)]. Если $T \gg \tau_{\text{кор}}$, то [см. (1.4.6)]

$$\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k, f_q; \varphi_r, \varphi_i) \approx \begin{cases} T \Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k; \varphi_r, \varphi_i) & \text{при } f_q = f_k; \\ 0 & \text{при } f_q \neq f_k, \end{cases} \quad (1.4.19)$$

где $\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k; \varphi_r, \varphi_i) =$

$$= \exp [j \pi (\varphi_r - \varphi_i) d] d \times \\ \times \int_{-1/2d}^{1/2d} \Phi_y^*(f_k, \varphi_y) \frac{\sin \pi L (\varphi_r - \varphi_y)}{\sin \pi d (\varphi_r - \varphi_y)} \frac{\sin \pi L (\varphi_i - \varphi_y)}{\sin \pi d (\varphi_i - \varphi_y)} d\varphi_y. \quad (1.4.20)$$

Если же размер антенны L и интервал пространственной корреляции поля $y_{\text{кор}}$ таковы, что $L \gg y_{\text{кор}}$, то спектр $\Phi_y(f, \varphi_y)$ мало изменяется на интервале пространственной частоты φ_y порядка $1/L$, а поэтому из формул (1.4.19) и (1.4.20) находим, что

$$\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k, f_q; \varphi_r, \varphi_i) \approx \begin{cases} M T \Phi_y^*(f_k, \varphi_r) & \text{при } f_q = f_k \text{ и } \varphi_i = \varphi_r; \\ 0 & \text{при } f_q \neq f_k \text{ и } \varphi_i \neq \varphi_r, \end{cases} \quad (1.4.21)$$

где учтено равенство

$$\int_{-1/2d}^{1/2d} \frac{\sin \pi M d (\varphi_r - \varphi_y)}{\sin \pi d (\varphi_r - \varphi_y)} \times \\ \times \frac{\sin \pi M d (\varphi_i - \varphi_y)}{\sin \pi d (\varphi_i - \varphi_y)} d\varphi_y = \begin{cases} M/d & \text{при } \varphi_i = \varphi_r; \\ 0 & \text{при } \varphi_i \neq \varphi_r. \end{cases}$$

Теперь вся подготовительная работа для вероятностного описания поля в пространстве $\{f, \varphi\}$ выполнена. Введем далее два вектора. Первый вектор $\mathcal{X}^*(f_k) = [\mathcal{X}^*(f_k, \varphi_{-M/2}), \mathcal{X}^*(f_k, \varphi_{-M/2+1}), \dots, \mathcal{X}^*(f_k, \varphi_{M/2-1})]$ включает M комплексных составляющих: $\mathcal{X}^*(f_k, \varphi_r)$, где f_k фиксировано, а $r = -M/2, \dots, 0, 1, \dots, M/2-1$. Второй вектор \mathcal{X}^* имеет $M(N/2+1)$ составляющих – величин $\mathcal{X}^*(f_k, \varphi_r)$, взятых в таком порядке: M величин $\mathcal{X}^*(f_0, \varphi_r)$, где f_0 фиксировано, а φ_r варьируется, далее аналогично M величин $\mathcal{X}^*(f_1, \varphi_r)$ и т. д., наконец, M величин $\mathcal{X}^*(f_{N/2}, \varphi_r)$. Таким образом, вектор \mathcal{X}^* с $M(N/2+1)$ комплексными составляющими содержит $N/2+1$ векторов $\mathcal{X}^*(f_k)$ – каждый с M составляющими, т. е. $\mathcal{X}^* = [\mathcal{X}^{*T}(f_0), \mathcal{X}^{*T}(f_1), \dots, \mathcal{X}^{*T}(f_{N/2})]^T$; в целом $M(N/2+1)$ его комплексных выборочных значений определяют пространственно-временную реализацию поля на элементах АР в области $\{f, \varphi\}$. Аналогично (1.4.7) можно записать распределение вектора \mathcal{X}^*

$$f(\mathcal{X}^*) = [\pi^{M(N/2+1)} \det \Phi^*]^{-1} \exp[-(\mathcal{X}^* - \mathcal{U}_{\mathcal{X}}^*)^T \times \quad (1.4.22)$$

$$\times \Phi_{\mathcal{X}}^{*-1} (\mathcal{X}^* - \mathcal{U}_{\mathcal{X}}^*)], \quad (1.4.22)$$

где математическое ожидание $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}^*$ и корреляционная матрица $\Phi_{\mathcal{X}}^*$ есть:

$$\mathcal{U}_{\mathcal{X}}^* = M[\mathcal{X}^*]; \quad \Phi_{\mathcal{X}}^* = M\{(\overline{\mathcal{X}^*} - \overline{\mathcal{U}_{\mathcal{X}}^*})(\mathcal{X}^* - \mathcal{U}_{\mathcal{X}}^*)^T\}. \quad (1.4.23)$$

Здесь $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}^*$ есть $M(N/2+1)$ -мерный вектор, состоящий из $N/2+1$ блоков векторов $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}^*(f_k)$ с M компонентами. Его r -я компонента есть двумерное Фурье-изображение математического ожидания процесса $x_m(t)$, вычисленное для временной частоты f_k и пространственной частоты φ_r . Матрица $\Phi_{\mathcal{X}}^*$ имеет размер $M(N/2+1) \times M(N/2+1)$. Так как $M(N/2+1)$ -мерный вектор \mathcal{X}^* образован $N/2+1$ блоками – M -мерными векторами $\mathcal{X}^*(f_k)$, то эрмитова матрица $\Phi_{\mathcal{X}}^* = M[\mathcal{X}^* \mathcal{X}^{*T}]$ является блочной, состоящей из блоков – матриц $\Phi_{\mathcal{X}}^*(k_1, k_2) = M[\mathcal{X}^*(f_{k_1}) \mathcal{X}^{*T}(f_{k_2})]$ размером $M \times M$ каждая. При выполнении соотношения (1.4.19) матрица $\Phi_{\mathcal{X}}^*$ по своей структуре аналогична матрице $G_{\mathcal{X}}$ (1.4.9) и состоит из $N/2+1$ диагональных блоков – матриц $\Phi_{\mathcal{X}}^*(k, k)$, которые далее будем обозначать через $\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k)$. Элементы матриц-блоков $\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k)$, в свою очередь, образованы значениями функции $\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k; \varphi_r, \varphi_i)$ [см. (1.4.20)], взятыми для каждой величины f_k при всех φ_r и φ_i , где $r, i = -M/2, \dots, 0, 1, \dots, M/2-1$. В соответствии с (1.4.19) эти значения нужно умножить на величину T . Тогда [см. (1.4.10)], плотность

$$f(\mathcal{X}^*) = [(\pi T)^{M(N/2+1)} \prod_{k=0}^{N/2} \det \Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k)]^{-1} \times \quad (1.4.24)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N/2} [\mathcal{X}^*(f_k) - \mathcal{U}_{\mathcal{X}}^*(f_k)]^T \times \right.$$

$$\times \Phi_{\mathcal{X}}^{*-1}(f_k) [\overline{\mathcal{X}^*(f_k)} - \overline{\mathcal{U}_{\mathcal{X}}^*(f_k)}] \left. \right\}.$$

Если дополнительно выполняется условие $L \gg u_{\text{кор}}$, то в соответствии с соотношением (1.4.21) диагональные матрицы-блоки $\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k)$, образующие матрицу $\Phi_{\mathcal{X}}^*$ [см. (1.4.23)], сами являются диагональными. Их элементы определяются значениями ЧВС $\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k, \varphi_r)$ (взятыми для $N/2+1$ величин f_k и M величин φ_r), которые в соответствии с формулой (1.4.21) равны $MT \Phi_{\mathcal{Y}}(f_k, \varphi_r)$. В таком случае распределение (1.4.24) примет вид

$$f(\mathcal{X}^*) = [(\pi TM)^{M(N/2+1)} \prod_{k=0}^{N/2} \prod_{r=-M/2}^{M/2-1} \Phi_{\mathcal{Y}}(f_k, \varphi_r)]^{-1} \times \quad (1.4.25)$$

$$\times \exp \left[-\frac{1}{TM} \sum_{k=0}^{N/2} \sum_{r=-M/2}^{M/2-1} 1/\Phi_{\mathcal{Y}}(f_k, \varphi_r) |\mathcal{X}^*(f_k, \varphi_r) - \bar{a}^*(f_k, \varphi_r)|^2 \right],$$

где $\mathcal{X}^*(f_k, \varphi_r)$ и $\bar{a}^*(f_k, \varphi_r)$ – r -е составляющие векторов $\mathcal{X}^*(f_k)$ и $\mathcal{U}_{\mathcal{X}}^*(f_k)$. Если в формуле (1.4.25) в соответствии с равенством (1.4.18) $\Phi_{\mathcal{Y}}(f_k, \varphi_r)$ заменить на $(1/d) \times \Phi_{\mathcal{Y}}(f_k, \varphi_r)$, то далее можно воспользоваться двумерным изображением $\mathcal{X}(f_k, \varphi_r)$ [см. (1.3.22)] непрерывной реализации поля $x(t, y)$, так как при выполнении равенства (1.4.18), подобно (1.3.33), $\mathcal{X}^*(f_k, \varphi_r) = (1/d)\mathcal{X}(f_k, \varphi_r)$. С учетом указанной замены из (1.4.25) следует выражение для плотности распределения $f(\mathcal{X})$ вектора \mathcal{X} .

В заключение рассмотрим случай, когда пространственно-временная реализация поля на элементах АР дискретна еще и по времени, т. е. является функцией $x(n\Delta, md)$, а ее двумерное изображение определяется формулой (1.3.27). В таком случае корреляционный момент изображений $\mathcal{X}^*(f_k, \varphi_r)$ вместо (1.4.12) определяется выражением

$$M \left\{ \mathcal{X}^*(f_k, \varphi_r) \mathcal{X}^{*T}(f_q, \varphi_i) \right\} = \Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k, f_q; \varphi_r, \varphi_i) = \quad (1.4.26)$$

$$= \sum_{m_2, m_1}^{M/2-1} \sum_{n_1, n_2}^{N/2-1} r[(n_2 - n_1)\Delta; (m_2 - m_1)d] \times$$

$$\times e^{j \cdot 2\pi[(f_k n_1 - f_q n_2)\Delta - (\varphi_r m_1 - \varphi_i m_2)d]}$$

Подставив выражение (1.3.30) для $r(v\Delta, \mu d)$ при $v = n_2 - n_1$ и $\mu = m_2 - m_1$ в формулу (1.4.26), получим, как и для выражения (1.4.15),

$$\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k, f_q; \varphi_r, \varphi_i) = \quad (1.4.27)$$

$$= \exp \left\{ j \pi [(f_q - f_k)\Delta - (\varphi_i - \varphi_r)d] \right\} \Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} d \int_{-1/2d}^{1/2d} \Phi_{\mathcal{Y}}^*(f, \varphi_y) \times$$

$$\times \frac{\sin \pi T(f_k - f)}{\sin \pi \Delta(f_k - f)} \frac{\sin \pi T(f_q - f)}{\sin \pi \Delta(f_q - f)} \frac{\sin \pi L(\varphi_r - \varphi_y)}{\sin \pi d(\varphi_r - \varphi_y)} \times$$

$$\times \frac{\sin \pi L(\varphi_i - \varphi_y)}{\sin \pi d(\varphi_i - \varphi_y)} df d\varphi_y,$$

где ЧВС $\Phi_y^{**}(f, \varphi_y)$ определяется формулой (1.3.29). Если $T \gg \tau_{\text{кор}}$ [см. (1.4.19)], то

$$\Phi_{\mathcal{X}}^{**}(f_k, f_q; \varphi_r, \varphi_i) \approx \begin{cases} N\Phi_{\mathcal{X}}^{**}(f_k; \varphi_r, \varphi_i) & \text{при } f_q = f_k; \\ 0 & \text{при } f_q \neq f_k. \end{cases} \quad (1.4.28)$$

$\Phi_{\mathcal{X}}^{**}(f_k; \varphi_r, \varphi_i)$ определяется формулой, аналогичной (1.4.20), где вместо спектра $\Phi_y(f, \varphi_y)$ (1.4.13) нужно использовать спектр $\Phi_y^{**}(f, \varphi_y)$ [см. (1.3.29)]. Если, кроме того, $L \gg y_{\text{кор}}$ [см. (1.4.21)] то

$$\Phi_{\mathcal{X}}^{**}(f_k, f_q; \varphi_r, \varphi_i) \approx \begin{cases} MN\Phi_y^{**}(f_k, \varphi_r) & \text{при } f_q = f_k \text{ и } \varphi_i = \varphi_r; \\ 0 & \text{при } f_q \neq f_k \text{ и } \varphi_i \neq \varphi_r, \end{cases} \quad (1.4.29)$$

Далее, аналогично (1.4.22) можно записать плотность распределения $f(\mathcal{X}^{**})$ для $M(N/2+1)$ -мерного комплексного вектора \mathcal{X}^{**} , составляющие которого определяются формулой (1.3.27). При выполнении условия (1.4.28) эта плотность определяется $N/2+1$ матрицами $\Phi_{\mathcal{X}}^{**}(f_k)$ размером $M \times M$ каждая. Для получения соответствующего выражения плотности распределения достаточно в формуле (1.4.24) все величины с одной звездочкой заменить на соответствующие величины с двумя звездочками, а T заменить на N . При выполнении соотношения (1.4.29) распределение $f(\mathcal{X}^{**})$ принимает вид, аналогичный (1.4.25), конкретная запись которого для вектора \mathcal{X}^{**} следует из этой формулы с учетом указанной выше замены. И наконец, если удовлетворяется равенство (1.3.32), то плотность $f(\mathcal{X}^{**})$ можно выразить с помощью ЧВС $\Phi_y(f, \varphi_y)$ [см. (1.4.25)].

1.5. Вероятностные характеристики реализаций типовых пространственно-временных полей

Для практического использования плотности распределения вектора пространственно-временных выборок реализации поля на элементах АР в области $\{t, \vec{r}\}$ необходимо знать математическое ожидание и корреляционную матрицу этого вектора, а в областях $\{f, \vec{r}\}$ и $\{f, \vec{\varphi}\}$ — математические ожидания и матрицы корреляций векторов выборочных значений соответственно одномерных и двумерных Фурье-изображений реализаций поля.

Характеристики плосковолнового поля. Для определения координат точек наблюдения поля будем использовать систему координат, показанную на рис. 1.6. Кроме единичного вектора \vec{u} , определяющего направление вектора \vec{r} точки наблюдения, используем также единичный вектор \vec{n} , перпендикулярный фронту волны и ориентированный в направлении ее распространения углами α_0 и β_0 , так что его направляющие косинусы: $n_x = \sin \beta_0 \cos \alpha_0$, $n_y = \sin \beta_0 \sin \alpha_0$, $n_z = \cos \beta_0$, где $-\pi < \alpha_0 \leq \pi$, $0 \leq \beta_0 < \pi$. Рассмотрим линейную АР (рис. 1.10), когда волна распространяется в плоскости, перпендикулярной к плоскости XOY , т. е. $\beta_0 = \pi/2$.

След плоскости волнового фронта ориентирован относительно АР углом α_0 . Число элементов решетки M , межэлементное расстояние d . Поле на апертуре антенны описывается формулой (1.3.9), где в данном случае $\vec{u} \cdot \vec{n} = \cos(\pi/2 - \alpha_0) = \sin \alpha_0$, $\vec{r} \cdot \vec{n} = y \cdot n_y = y \sin \alpha_0$. Следовательно, $x(t, \vec{r}) = x[t - (y/c) \sin \alpha_0]$.

Определим характеристики поля в области $\{t, \vec{r}\}$. ПВКФ поля [см. (1.3.11)] для точек с координатами y_1 и y_2 определяется выражением

$$r(\tau, \vec{\rho}) = r[\tau - (1/c)(y_2 - y_1) \sin \alpha_0]. \quad (1.5.1)$$

Для дискретной решетки $y_1 = md$ и $y_2 = nd$, поэтому

$$r(\tau, \vec{\rho}) = r\{\tau - [(d/c) \sin \alpha_0](n - m)\} = r[\tau - \delta_0(n - m)], \quad (1.5.2)$$

где $\delta_0 = (d/c) \sin \alpha_0$ — единичная задержка. Обозначим через $x(t)$ процесс на выходе элемента с номером ноль, т. е. $x_0(t) = x(t)$, тогда на элементах с номерами m и n будет тот же процесс $x(t)$, но задержанный соответственно на время $\tau_m = (1/c)y_1 \sin \alpha_0 = m\delta_0$ и $\tau_n = n\delta_0$, т. е.

$$x(t_1, y_1) = x_m(t_1) = x(t_1 - \tau_m); \quad x(t_2, y_2) = x_n(t_2) = x(t_2 - \tau_n). \quad (1.5.3)$$

В результате на основе формул (1.3.2) и (1.3.1) находим

$$r(t_2 - t_1; y_2 - y_1) = M\{x(t_1, y_1)x(t_2, y_2)\} = r[\tau - (\tau_n - \tau_m)], \quad (1.5.4)$$

что совпадает с (1.5.2).

Определим теперь математическое ожидание и корреляционную матрицу [см. (1.4.2)]. Математическое ожидание $M\{x(t, \vec{r})\} = s[t - (y/c) \sin \alpha_0]$, где $s(t)$ — детерминированный сигнал на элементе с номером ноль. Выходу m -го элемента АР в момент $t = l\Delta$ отвечает составляющая $a_m(l) = s(l\Delta - m\delta_0)$ вектора \mathcal{X}_x . Матрица R_x состоит из L^2 матриц-блоков $R_x(l, k)$ размером $M \times M$ каждая. Так как $t_1 = l\Delta$ и $t_2 = k\Delta$, то m, n -й элемент матрицы $R_x(l, k)$ определяется выражением (1.5.2), где $\tau = (k - l)\Delta$. В таком случае m, n -й элемент l, k -й

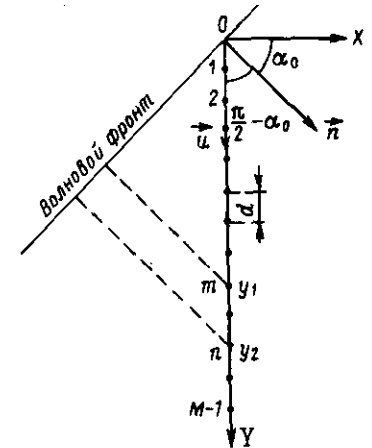


Рис. 1.10

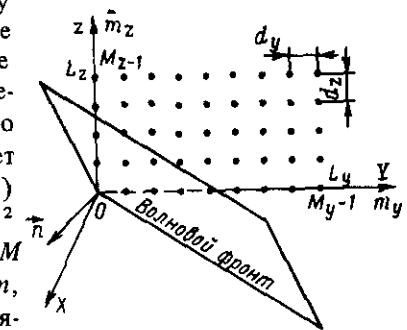


Рис. 1.11

матрицы-блока $R_x(l, k)$ корреляционной матрицы R_x (1.4.3) – определяется выражением

$$r[(k-l)\Delta - (n-m)\delta_0], \quad (1.5.5)$$

где $r(\tau)$ – корреляционная функция процесса на выходе элемента с нулевым номером; $m, n=0, 1, \dots, M-1$; $l, k=1, 2, \dots, L$ – всего $M^2 L^2$ элементов матрицы R_x .

Рассмотрим плоскую АР (рис. 1.11). Здесь направление распространения волны – вектор \vec{n} – определяется углами α_0 и β_0 . Точка наблюдения поля на выходе элемента m_y, m_z задается вектором \vec{r} с координатами $x=0$; $y=d_y m_y$; $z=d_z m_z$. Поэтому, в соответствии с (1.3.9) и приведенными выше выражениями для направляющих косинусов

$$x(t, \vec{r}) = x[t - (1/c)(d_y m_y \sin \beta_0 \sin \alpha_0 + d_z m_z \cos \beta_0)], \quad (1.5.6)$$

а корреляционная функция поля (1.3.11) для тех же точек

$$r(\tau, \vec{\rho}) = r[\tau - (d_y/c)(n'_y - m_y) \sin \beta_0 \sin \alpha_0 - (d_z/c)(n'_z - m_z) \cos \beta_0], \quad (1.5.7)$$

где $m_y, n'_y=0, 1, \dots, M_y-1$; $m_z, n'_z=0, 1, \dots, M_z-1$. Запишем выражение для вычисления элементов матрицы R_x [см. (1.4.3)]

$$r[(k-l)\Delta - (n'_y - m_y)\delta_{0,y} - (n'_z - m_z)\delta_{0,z}], \quad (1.5.8)$$

где $\delta_{0,y} = (d_y/c) \sin \beta_0 \sin \alpha_0$; $\delta_{0,z} = (d_z/c) \cos \beta_0$. Количество элементов матрицы R_x (1.4.3) для плоской АР равно $M_y^2 M_z^2 L^2$. Аналогичным образом можно найти и вектор \vec{d}_x .

Определим далее вероятностные характеристики плосковолнового поля в области $\{f, \vec{r}\}$. Сначала получим формулу для вычисления элементов матрицы G_x , образованной диагональными матрицами – блоками $G_x(f_k)$ размером $M \times M$. Как следует из формулы (1.4.9), m -й элемент матрицы $G_x(f)$ представляет собой взаимную спектральную плотность $g_{mn}(f)$ реализаций поля на выходах m -го и n -го элементов АР, т. е. Фурье-изображение взаимной корреляционной функции этих реализаций. В случае линейной АР такая функция определяется выражением (1.5.2), а поэтому

$$g_{mn}(f) = g(f) e^{-j \cdot 2\pi f \delta_0 (n-m)} = g(f) e^{j \cdot 2\pi f \delta_0 (m-n)}, \quad (1.5.9)$$

где $g(f)$ – спектральная плотность процесса на выходе элемента АР, отвечающая корреляционной функции $r(\tau)$. Определим вектор $L_x(f)$, имеющий M компонент Фурье-изображений $\exp(-j \cdot 2\pi f \delta_0 m)$ временных задержек процессов на элементах АР, где $m=0, 1, \dots, M-1$:

$$L_x^T(f) = [1, e^{-j \cdot 2\pi f \delta_0}, \dots, e^{-j \cdot 2\pi f \delta_0 (M-1)}], \quad (1.5.10)$$

Так как формула (1.5.9) определяет m -й элемент матрицы $G_x(f)$, то с учетом вектора $L_x(f)$ [см. (1.5.10)] сама матрица $G_x(f)$ может быть представлена в виде

$$G_x(f_k) = g(f_k) \bar{L}_x(f_k) L_x^T(f_k), \quad (1.5.11)$$

где $K=0, 1, \dots, N/2$. Из этого выражения следует, что матрица $G_x(f_k)$ имеет ранг, равный единице, а поэтому является особенной матрицей и не имеет обратной. Физически это следует из свойств идеального плосковолнового поля, которое является „замороженным“ (коэффициент пространственной корреляции поля в любых двух его точках волнового фронта равен единице). Вектор математического ожидания $A_x(f_k)$, входящий в распределение (1.4.10), определяется вектором (1.5.10): $A_x(f_k) = S(f_k) L_x(f_k)$, где $S(f)$ – изображение детерминированного сигнала $s(t)$. Для плоской АР (см. рис. 1.7) вычисление элементов матрицы G_x (1.4.9) можно осуществить аналогичным образом, выполнив сквозную нумерацию элементов решетки.

Определим теперь вероятностные характеристики плосковолнового поля в области $\{f, \vec{\varphi}\}$. Рассмотрим для простоты линейную АР, когда эта область двумерна – $\{f, \varphi_y\}$, а реализация поля $x(t, md)$. Тогда ее двумерное изображение определяется формулой (1.4.11), где суммирование по номерам осуществляется от $m=0$ до $m=M-1$. Будем считать также, что выполняется неравенство $T \gg \tau_{кор}$. В таком случае корреляционная матрица $\Phi_{\mathcal{X}}$ (1.4.23) состоит из диагональных матриц-блоков $\Phi_{\mathcal{X}}(f_k)$ элементы которых определяются выражением (1.4.19). Как следует из этого выражения, функцию $\Phi_{\mathcal{X}}(f_k; \varphi_r, \varphi_i)$ можно найти из формулы (1.4.20), и с учетом принятой здесь нумерации элементов АР

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k; \varphi_r, \varphi_i) &= \exp[j \pi d(M-1)(\varphi_i - \varphi_r)] \times \\ &\times d \int_{-1/2d}^{1/2d} \Phi_y^*(f_k, \varphi_y) \frac{\sin \pi L(\varphi_r - \varphi_y)}{\sin \pi d(\varphi_r - \varphi_y)} \times \\ &\times \frac{\sin \pi L(\varphi_i - \varphi_y)}{\sin \pi d(\varphi_i - \varphi_y)} d\varphi_y, \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

где $\varphi_r = r/L$; $\varphi_i = i/L$; $r, i = -M/2, \dots, 0, 1, \dots, M/2-1$. Для получения окончательного результата в формулу (1.5.12) нужно подставить ЧВС $\Phi_y(f_k, \varphi_y)$ плосковолнового поля. Такой спектр находится путем использования общего выражения для ЧВС $\Phi(f, \vec{\varphi})$ (1.3.13) и формулы (1.3.26):

$$\begin{aligned} \Phi_y(f, \varphi_y) &= P(f, 0) \delta\left(\frac{f}{c} n_y - \varphi_y\right) = \\ &= g(f) \delta\left(\frac{f}{c} \sin \alpha_0 - \varphi_y\right). \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Подставив это выражение в формулу (1.5.12), с учетом (1.4.18) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k; \varphi_r, \varphi_i) &= g(f_k) \exp [j\pi d(M-1)(\varphi_i - \varphi_r)] \times \\ &\times \frac{\sin \pi L [\varphi_r - (f_k/c) \sin \alpha_0]}{\sin \pi d [\varphi_r - (f_k/c) \sin \alpha_0]} \times \\ &\times \frac{\sin \pi L [\varphi_i - (f_k/c) \sin \alpha_0]}{\sin \pi d [\varphi_i - (f_k/c) \sin \alpha_0]} \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

Аналогично (1.5.10) найдем вектор $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(f_k)$ с M составляющими, причем r -я равна

$$\exp \left[-j\pi d(M-1) \left(\frac{f}{c} \sin \alpha_0 - \varphi_r \right) \right] \frac{\sin \pi L [\varphi_r - (f_k/c) \sin \alpha_0]}{\sin \pi d [\varphi_r - (f_k/c) \sin \alpha_0]}, \quad (1.5.15)$$

где $r = -M/2, \dots, 0, 1, \dots, M/2-1$. Так как формула (1.5.14) определяет r , i -й элемент матрицы $\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k)$, то с учетом вектора $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(f_k)$ [см. (1.5.15)] сама матрица $\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k)$ может быть записана с помощью этого вектора:

$$\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k) = g(f_k) \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{X}}(f_k) \mathcal{L}_{\mathcal{X}}^T(f_k). \quad (1.5.16)$$

Сравним формулы (1.5.11) и (1.5.16). Нетрудно показать, что между компонентами (1.5.15) вектора $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(f)$ и компонентами [см. (1.5.10)] вектора $L_{\mathcal{X}}(f)$ существует прямая связь. Так, m -я компонента $\exp(-j \cdot 2\pi f \delta_0 m)$ вектора $L_{\mathcal{X}}(f)$ есть Фурье-изображение временной функции — задержки $\delta(t - \delta_0 m)$; m -я компонента (1.5.15) вектора $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}(f)$ — Фурье-изображение функции $\exp(-j \cdot 2\pi f \delta_0 m)$ — функции пространственной координаты $y = md$ (или просто номера элемента m). Действительно, так как $\delta_0 = (d/c) \sin \alpha_0$, то в соответствии со сказанным находим

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j \cdot 2\pi \frac{fk}{c} \sin \alpha_0 \cdot dm} \cdot e^{j \cdot 2\pi \varphi_r dm} &= \\ = \exp \left[-j\pi d(M-1) \frac{fk}{c} \sin \alpha_0 - \varphi_r \right] \times \\ &\times \frac{\sin \pi L [\varphi_r - (f_k/c) \sin \alpha_0]}{\sin \pi d [\varphi_r - (f_k/c) \sin \alpha_0]} \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

Матрица $\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k)$ размером $M \times M$ с элементами (1.5.14), так же как и матрица $G_{\mathcal{X}}(f_k)$ [см. (1.5.11)], имеет ранг, равный единице. Из формулы (1.5.14) следует, что при $\varphi_i = \varphi_r$

$$\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k, \varphi_r) = g(f_k) \frac{\sin^2 \pi L [\varphi_r - (f_k/c) \sin \alpha_0]}{\sin^2 \pi d [\varphi_r - (f_k/c) \sin \alpha_0]} \quad (1.5.18)$$

определяет диагональные элементы матрицы $\Phi^*(f_k)$ для каждой из $N/2+1$ временных частот f_k и M пространственных частот φ_r , т. е. ЧВС плоскотоволнового поля, измеренного с помощью линейной АР с M элементами (см. разд. 2.6). Если $L \gg c/f_k = \lambda_k$, то матрица (1.5.16) такова, что существенно отличны от нуля лишь те ее элементы, которые находятся вблизи элемента главной диагонали с номером r , наиболее близким к величине $(L/\lambda_k) \sin \alpha_0$.

Полученные выше выражения по своему виду напоминают формулы для характеристик направленности (ХН) линейных АР. Действительно, примем в выражении (1.5.17) вместо дискретного значения $\varphi_r = r/L$ проекции пространственной частоты φ_y выражение для самой этой проекции в явном виде $\varphi_y = (f/c) \sin \alpha$, где α — произвольный угол. Опустим также индекс y частоты f_k . В таком случае формула (1.5.17) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j \cdot 2\pi \frac{f}{c} \sin \alpha_0 dm} e^{j \cdot 2\pi \frac{f}{c} \sin \alpha dm} &= \\ = \exp [j\pi d(M-1)(f/c)(\sin \alpha - \sin \alpha_0)] \times \\ &\times \frac{\sin \pi L [(f/c)(\sin \alpha - \sin \alpha_0)]}{\sin \pi d [(f/c)(\sin \alpha - \sin \alpha_0)]}, \end{aligned} \quad (1.5.19)$$

что совпадает с выражением для ХН [58] с точностью до нормирующего множителя.

Использование частотно-волновых представлений позволяет дать трактовку работы устройства формирования характеристик направленности (УФХН), несколько отличную от традиционной. Обычно [68] эффект работы УФХН объясняют с позиций повышения отношения c/λ на выходе УФХН, которое в случае некоррелированного по элементам шума для линейной АР с M элементами увеличивается по сравнению с отношением c/λ на элементе в M раз. Другое объяснение может основываться на представлении работы УФХН как пространственного фильтра [47]. Полагая шумовое поле изотропным, образованным большим числом источников, равномерно распределенным в пространстве и генерирующим плоские волны, можно рассматривать АР с УФХН как пространственный фильтр, который подавляет плоские волны, приходящие с направлений α , отличных от α_0 [см. (1.5.19)]. Рассмотрим теперь представление реализаций плоскотоволнового поля на элементах линейной АР на основе алгоритма двумерного БПФ. Выше было определено [см. (1.3.27)] двумерное Фурье-изображение реализации поля. Перейдем в этом выражении к дискретным временным и пространственным частотам $f = k/N\Delta$ и $\varphi_y = r/L = r/Md$. Кроме того, положим, что целочисленные переменные n, k и m, r определены следующим образом: $n, k = 0, 1, \dots, N-1$ и $m, r = 0, 1, \dots, M-1$. В таком случае выражение (1.3.27) принимает вид

$$\Phi_{\mathcal{X}}^*(k, r) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta, md) e^{-j \cdot 2\pi \left(\frac{kn}{N} - \frac{rm}{M} \right)} \quad (1.5.20)$$

Двумерное изображение (1.5.20) вычисляется последовательно, вначале по времени, а затем по пространству:

$$\mathcal{X}^{**}(k, r) = \sum_{m=0}^{M-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta, md) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \right] e^{j \frac{2\pi}{M} r m}, \quad (1.5.21)$$

где выражение в квадратных скобках

$$\mathcal{X}_m^*(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta, md) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (1.5.22)$$

есть изображение дискретной временной реализации (1.1.15) для $f = k/N\Delta$ и принятой здесь нумерации временных отсчетов. Заметим, что операция БПФ по пространству в (1.5.20) и (1.5.21) отличается от традиционной положительным показателем экспоненты. Это вызвано принятым в теории поля способом определения ЧВС [см. (1.3.5)]. В заключение уточним задание вектора математического ожидания $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^*(f_k)$, входящего в распределение (1.4.24). Он определяется вектором $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^*(f_k)$ с компонентами (1.5.15): $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^*(f_k) = S(f_k) \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}^*(f_k)$, где $S(f)$ — изображение детерминированного сигнала $s(t)$.

Характеристики изотропного и анизотропного полей. Вероятностные характеристики таких полей были определены в разд. 1.3. Найдем вероятностные характеристики реализаций изотропного поля на элементах АР, сделав это сперва в области $\{t, \vec{r}\}$. ПВКФ изотропного поля $r(\tau, \rho)$ [см. (1.3.17)] определяет m -й элемент k -й матрицы-блока $R_x(l, k)$, входящей в корреляционную блочную матрицу R_x (1.4.3). Для этого в формуле (1.3.17) нужно принять $\tau = (k-l)\Delta$ и $\rho = |m-n|d$ для линейной АР и $\rho = \{[(n'_y - m'_y)d_y]^2 + [(n'_z - m'_z)d_z]^2\}^{1/2}$ для плоской.

В области $\{f, \vec{r}\}$ вероятностные характеристики реализаций изотропного поля определяются блочной матрицей G_x [см. (1.4.9)], блоками которой являются матрицы $G_x(f_k)$. Элемент номер m, n последней матрицы находится из формулы (1.3.16) для данной частоты f_k и величины расстояния ρ между соответствующими преобразователями АР. Так, для линейной АР $\rho = |n-m|d$, а поэтому

$$g_{mn}(f_k) = g(f_k) \frac{\sin(2\pi f_k |n-m|d/c)}{2\pi f_k |n-m|d/c}, \quad (1.5.23)$$

где $g(f)$ — спектральная плотность изотропного поля, измеренная на входе элемента АР. Матрица $G_x(f_k)$ является симметричной, причем ее элементы, расположенные вдоль каждой из диагоналей, одни и те же (тёплицева матрица, m, n -й элемент которой определяется разностью $n-m$).

Найдем теперь вероятностные характеристики реализаций изотропного поля в области $\{f, \vec{\varphi}\}$, которые для линейной АР не зависят от ее положения в пространстве. Поэтому примем, что антенна расположена вдоль оси ОУ, тогда указанные характеристики будут определяться формулой (1.5.12), где проекцию φ_y пространственной частоты $\vec{\varphi}$ можно заменить на ее модуль $|\varphi| = \varphi$. Выражение для ЧВС изотропного поля $\Phi_y(f_k, \varphi)$, входящее в (1.5.12), следует из формул (1.3.19), (1.3.20) и (1.4.16).

Если $\lambda_k = c/f_k = 2d$, то с учетом последних выражений, а также интеграла, определяющего соотношение (1.4.21), из формулы (1.5.12) получаем, что при $\varphi_i = \varphi_r$ величина $\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k; \varphi_r, \varphi_i) = g(f_k)M$, а при $\varphi_i \neq \varphi_r$ она равна нулю. Этот результат справедлив для изотропного поля, некоррелированного на элементах АР [см. (1.5.23)], и согласуется с коэффициентом концентрации линейной АР, умноженным на $g(f_k)$.

Если $\lambda_k > 2d$, то из формул (1.3.19), (1.3.20) и (1.4.18) следует, что

$$\Phi_{\mathcal{Y}}^*(f_k, \varphi) = \begin{cases} g(f_k) \frac{\lambda_k}{2d} & \text{при } |\varphi| \leq 1/\lambda_k, \\ 0 & \text{при } |\varphi| > 1/\lambda_k, \end{cases} \quad (1.5.24)$$

а поэтому из выражения (1.5.12) получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k; \varphi_r, \varphi_i) &= \exp[j\pi d(M-1)(\varphi_i - \varphi_r)] \times \\ & \times g(f_k) \frac{\lambda_k}{2} \int_{-1/\lambda_k}^{1/\lambda_k} \frac{\sin \pi L (\varphi_r - \varphi)}{\sin \pi d (\varphi_r - \varphi)} \times \\ & \times \frac{\sin \pi L (\varphi_i - \varphi)}{\sin \pi d (\varphi_i - \varphi)} d\varphi. \end{aligned} \quad (1.5.25)$$

В отличие от интеграла (1.4.21) здесь пределы равны $\pm 1/\lambda_k$, поэтому отношения тригонометрических функций на этом интервале уже не ортогональны. Однако, если $L/\lambda_k \gg 1$, а $2d/\lambda_k$ близко к единице, то интеграл в (1.5.25) приближенно равен M/d , а

$$\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k; \varphi_r, \varphi_i) \approx \begin{cases} g(f_k) M \frac{\lambda_k}{2d} & \text{при } \varphi_i = \varphi_r \text{ и } |\varphi_r| \leq 1/\lambda_k; \\ 0 & \text{при } \varphi_i \neq \varphi_r. \end{cases} \quad (1.5.26)$$

Так как в соответствии с (1.4.12) $\Phi_{\mathcal{X}}^*(f_k, \varphi_r) = M \{ |\mathcal{X}^*(f_k, \varphi_r)|^2 \}$, а для принятых условий коэффициент концентрации АР $K \approx 2L/\lambda$, т. е.

СИСТЕМЫ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ
ОБРАБОТКИ2.1. Оптимальные системы
обнаружения многомерного сигнала
(синтез и анализ)

Синтез оптимального алгоритма обнаружения многомерного стохастического сигнала. В первых статьях, посвященных синтезу оптимальных СПВО, появившихся в начале шестидесятых годов [84, 91], а также в более поздних работах [48, 76, 39, 94] и др. принято предположение о том, что поля сигнала и шума гауссовы. Синтез СПВО осуществляется на основе использования пространственно-временной реализации поля, заданной на элементах АР, с помощью алгоритма обработки, являющегося отношением правдоподобия (ОП). Начнем изучение задачи синтеза оптимальной СПВО, следуя именно такой постановке [84], и далее кратко рассмотрим другие ее разновидности.

В качестве нулевой гипотезы H_0 примем наличие лишь шума, а в качестве альтернативы H_1 — шума и сигнала. Начнем рассмотрение задачи синтеза с области $\{f, \vec{r}\}$ для линейной АР, т. е. фактически с двумерной области $\{k, m\}$, где $f = k/T$, $k = 0, 1, \dots, N/2$ и $y = md$, $m = 0, 1, \dots, M-1$. Распределение $M(N/2+1)$ -мерного вектора X в таком случае определяется выражением (1.4.10), где вектор X фактически распадается на $N/2+1$ некоррелированных M -мерных векторов $X(f_k)$ с составляющими $X_m(f_k)$, являющимися Фурье-изображениями (1.1.9) временных реализаций $x_m(t)$ поля на элементах АР, $t \in (-T/2, T/2)$. Обозначим $M \times M$ -матрицу взаимных спектральных плотностей мощности (ВСПМ) реализации поля шума на элементах АР через $G_n(f)$. Аналогичную матрицу для поля сигнала обозначим через $G_s(f)$. Для задачи синтеза оптимального обнаружителя будем пользоваться критерием Неймана—Пирсона, максимизирующим вероятность обнаружения P_o при фиксированном значении вероятности ложной тревоги P_n . Положим также, что поля сигнала и шума взаимодействуют аддитивно. В таком случае оптимальный алгоритм обнаружения сводится к ОП — отношению плотностей распределения $f(X/H_1)$ и $f(X/H_0)$ [см. (1.4.10)] соответственно для матриц ВСПМ $G_n(f_k) + G_s(f_k)$ и $G_n(f_k)$ и математического ожидания $A_x(f_k) = 0$. Тогда, с точностью до постоянного слагаемого, натуральный логарифм ОП определяется выражением

$$\Lambda(X) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N/2} X^T(f_k) \left\{ G_n^{-1}(f_k) - [G_n(f_k) + G_s(f_k)]^{-1} \right\} \bar{X}(f_k) \quad (2.1.1)$$

Алгоритм оптимального обнаружения многомерного стохастического сигнала сводится, таким образом, к вычислению для каждой частоты f_k эрмитовой формы и их последующему суммированию. Учитывая это

$\Phi_x(f_k, \varphi_r) \approx M^2 g(f_k)/K$, то ЧВС изотропного поля есть $Mg(f_k)/K$. ЧПС такого поля определяется обратным дискретным преобразованием [подобным (4.2.16)] его ЧВС. С учетом принятого приближения ЧПС $\sim g(f_k)(M/K)\delta_0(\mu)$, где $\delta_0(\mu) = 1$ при $\mu = 0$ и $\delta_0(\mu) = 0$ при $\mu \neq 0$ [здесь $\mu = m_2 - m_1$, как и в (1.4.13)].

Чтобы нагляднее проиллюстрировать свойства СПВО, удобно рассматривать поле, некоррелированное на элементах АР. Таким является поле тепловых шумов в каналах АР. В принятом выше приближении ($L/\lambda \gg 1$, $2d/\lambda \sim 1$) иногда можно считать некоррелированным и поле изотропного шума. Будем далее его называть некоррелированным полем шума. Спектр шума на элементах АР такого поля приближенно равен $g(f)M/K(f)$, что согласуется с представлением его спектра на выходе компенсатора АР [см. (2.2.48)]. Для упрощения записи формул будем сохранять величину $g(f)$, полагая, что при $2d/\lambda \neq 1$ ее нужно умножить на отношение $M/K(f)$.

Рассмотрим теперь кратко случай анизотропного поля, полагая, что точки наблюдения принадлежат оси OZ (вертикали), а поэтому в выражении для ЧПС такого поля [см. (1.3.21)] $\gamma = 0$, и

$$P(f, z) = \frac{1}{2} \int_0^\pi F(f, \beta) e^{j \cdot 2\pi f \frac{z}{c} \cos \beta} \sin \beta d\beta. \quad (1.5.27)$$

Положим, что излучатели, расположенные на поверхности, имеют ХН вида $\cos \beta$, так что [90]

$$F(f, \beta) = \begin{cases} 4g(f) \cos \beta & \text{при } 0 \leq \beta \leq \pi/2; \\ 0 & \text{при } \pi/2 < \beta \leq \pi, \end{cases} \quad (1.5.28)$$

где $g(f)$ — спектральная плотность поля. В таком случае для линейной АР, расположенной на оси OZ, характеристики поля в области $\{f, \vec{r}\}$ определяются матрицей G_x [см. 1.4.9], элементы которой следуют из формул (1.5.27) и (1.5.28) при $f = f_k$ и $z = (n-m)d$. Характеристики такого поля в области $\{f, \vec{\varphi}\}$ определяются его ЧВС, выражение которого есть результат выполнения Фурье-преобразования по переменной z выражения (1.5.27), полученного с учетом (1.5.28):

$$\Phi_z(f, \varphi_z) = \begin{cases} 2 \frac{c^2}{f^2} \varphi_z & \text{при } 0 \leq \varphi_z \leq f/c; \\ 0 & \text{при других } \varphi_z, \end{cases} \quad (1.5.29)$$

где φ_z — проекция вектора пространственной частоты $\vec{\varphi}$ на ось OZ. Связь ЧВС $\Phi_z(f, \varphi_z)$ и $\Phi_x(f, \varphi_z)$ непрерывной и дискретной реализаций поля определяется формулой (1.4.16), а элементы матрицы Φ_x [см. (1.4.23)] характеристик поля для линейной АР находятся из (1.5.12) с учетом формулы (1.5.29).

обстоятельство, удобно в выражении (2.1.1) перед суммой ввести множитель $1/2$ и одновременно нижний предел суммирования заменить с $k=0$ на $k=-N/2$ (далее множитель $1/2$ можно опустить). Также удобно от ОП перейти к функционалу отношения правдоподобия, т. е. к функциям непрерывного аргумента (частоты f), и, соответственно, от сумм к интегралам. Не претендуя на строгость, это можно сделать, положив просто $1/T \approx \approx df$ и взяв пределы интегрирования равными $\pm f_B$ (условие $f_B T \gg 1$, принятое в разд. 1.4, является физической предпосылкой для возможности такого перехода). В результате из (2.1.1) получаем

$$\Lambda(X) = \int_{-f_B}^{f_B} X^T(f) \left\{ G_n^{-1}(f) - [G_n(f) + G_s(f)]^{-1} \right\} \bar{X}(f) df. \quad (2.1.2)$$

Наибольшую трудность реализации в СПВО алгоритма (2.1.2) представляет нахождение обратных матриц. Поэтому важное значение имеет учет конкретных особенностей полей шума и сигнала. Положим, что поле сигнала плосковолновое, а поэтому матрица ВСИМ его реализаций на элементах АР определяется выражением (1.5.11). В отношении поля помех никаких предположений делать не будем. Таким образом,

$$G_s(f) = g_s(f) \bar{L}_s(f) L_s^T(f), \quad G_n(f) = g_n(f) N(f), \quad (2.1.3)$$

где $g_s(f)$ и $g_n(f)$ — спектры мощности сигнала и шума на выходе преобразователя АР; M -компонентный вектор $L_s(f)$ (1.5.10) образован составляющими $\exp\{-j \cdot 2\pi f \delta_s m\}$, где $\delta_s = (d/c) \sin \alpha_s$; α_s — угол прихода сигнала, $m=0, 1, \dots, M-1$; матрица $N(f)$ нормирована так, что ее след равен числу элементов АР, т. е. $\text{tr}\{N(f)\} = M$, аналогично из (1.5.10) следует, что $\text{tr}\{\bar{L}_s(f) L_s^T(f)\} = M$.

Сделанное выше предположение о плосковолновой структуре поля сигнала дает возможность воспользоваться известной леммой об обращении матриц [69], которая в данном случае сводится к утверждению о том, что для $M \times M$ -матрицы A и M -компонентного вектора B справедливо тождество

$$(A + \bar{B} B^T)^{-1} = A^{-1} - (1 + B^T A^{-1} \bar{B})^{-1} A^{-1} \bar{B} B^T A^{-1}. \quad (2.1.4)$$

Его легко проверить путем умножения обеих частей (2.1.4) на матрицу $A + \bar{B} B^T$ (величина в круглых скобках справа — скаляр). В результате применения этого тождества находим, что

$$\begin{aligned} (G_n + G_s)^{-1} &= (g_n N + g_s \bar{L}_s L_s^T)^{-1} = \\ &= \frac{1}{g_n} N^{-1} - \left[\frac{g_s / g_n^2}{1 + (g_s / g_n) L_s^T N^{-1} \bar{L}_s} \right] N^{-1} \bar{L}_s L_s^T N^{-1}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Здесь и далее, для упрощения записи будем иногда опускать аргумент f . Подставив (2.1.5) в (2.1.2), получаем алгоритм обнаружения многомерного плосковолнового стохастического сигнала

$$\begin{aligned} \Lambda(X) &= \int_{-f_B}^{f_B} \frac{g_s(f) / g_n^2(f)}{1 + [g_s(f) / g_n(f)] L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)} \times \\ &\times |X^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)|^2 df. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Алгоритм (2.1.6) можно упростить в случае малого входного отношения с/ш, когда $g_s(f) \ll g_n(f)$ и знаменатель первого сомножителя близок к единице:

$$\Lambda(X) \approx \int_{-f_B}^{f_B} \frac{g_s(f)}{g_n^2(f)} |X^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)|^2 df. \quad (2.1.7)$$

При выполнении неравенства $g_s(f) \ll g_n(f)$ алгоритм (2.1.7) можно получить и без использования тождества (2.1.5), так как в таком случае $(G_n + G_s)^{-1} \approx G_n^{-1} (E - G_s G_n^{-1})$, где E — единичная матрица, а поэтому из основного выражения (2.1.2) сразу находим

$$\Lambda(X) \approx \int_{-f_B}^{f_B} X^T(f) G_n^{-1}(f) G_s(f) G_n^{-1}(f) \bar{X}(f) df. \quad (2.1.8)$$

Подставив в эту формулу G_s и G_n из (2.1.3), приходим к алгоритму (2.1.7). **Функциональная схема оптимальной СПВО.** Проанализируем процедуру обработки информации в оптимальной СПВО, определяемую алгоритмом (2.1.6). Введем следующие обозначения:

$$H(f) = N^{-1}(f) \bar{L}_s(f), \quad (2.1.9)$$

$$h(f) = \frac{\sqrt{g_s(f)}}{g_n(f)} \sqrt{\frac{1}{1 + [g_s(f) / g_n(f)] L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)}} \quad (2.1.10)$$

и запишем алгоритм (2.1.6) в таком компактном виде

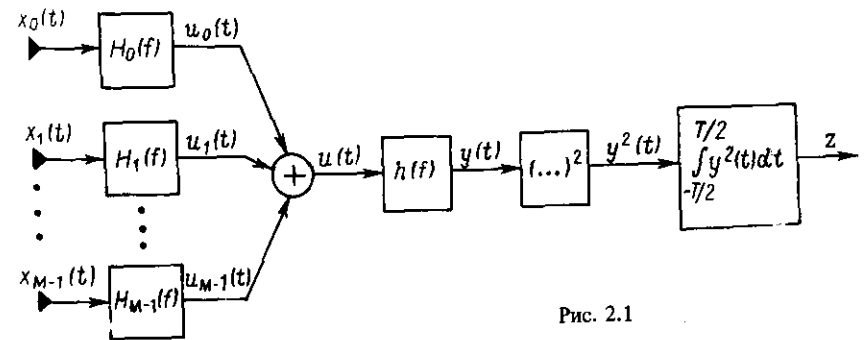


Рис. 2.1

$$\Lambda(X) = z = \int_{-f_B}^{f_B} h^2(f) |X^T(f)H(f)|^2 df, \quad (2.1.11)$$

где z – выходной (индикаторный) эффект СПВО. Если в (2.1.11) величину $h^2(f)$ ввести под знак модуля и воспользоваться далее формулой Парсевалля, то функциональную схему СПВО можно представить в виде, показанном на рис. 2.1. Здесь $x_m(t)$ – составляющие M -мерного процесса на выходе элементов АР; $H_m(f)$ – компоненты M -мерного фильтра с векторной КЧХ $H(f)$ (2.1.9); $h(f)$ – КЧХ скалярного послесуммарного фильтра (2.1.10). Далее реализуются операции квадратичного детектирования и интегрирования, так что в результате сравнения величины z с пороговой может приниматься решение об обнаружении сигнала.

Для более подробного анализа перепишем формулу (2.1.11) в развернутом виде:

$$z = \int_{-f_B}^{f_B} h^2(f) \left| \sum_{m=0}^{M-1} X_m(f)H_m(f) \right|^2 df. \quad (2.1.12)$$

Здесь в соответствии с формулой (2.1.9) m -я составляющая $H(f)$

$$H_m(f) = \sum_{n=0}^{M-1} F_{mn}(f) e^{j \cdot 2\pi f \tau_n}, \quad (2.1.13)$$

где $F_{mn}(f)$ – m, n -й элемент обратной матрицы $N^{-1}(f)$; $\exp\{j \cdot 2\pi f \tau_n\}$ – n -я составляющая вектора $\bar{L}_s(f)$; τ_n – задержка процесса на входе n -го преобразователя, равная для линейной АР величине $\tau_n = \delta_s n$, а δ_s определено в (2.1.3). Заметим, что в (2.1.9) вектор $\bar{L}_s(f)$ описывает операцию опережения – его компоненты определяются величинами $+\tau_m$; математически это отвечает операции компенсации запаздывания точек плоского фронта волны, описываемого вектором $L_s(f)$, компоненты которого определяются величинами $-\tau_m$ ($\tau_m \geq 0$). Подставим выражение (2.1.13) в (2.1.12), тогда

$$z = \int_{-f_B}^{f_B} h^2(f) \left| \sum_{n=0}^{M-1} e^{j \cdot 2\pi f \tau_n} \sum_{m=0}^{M-1} F_{mn}(f) X_m(f) \right|^2 df. \quad (2.1.14)$$

Алгоритмы (2.1.11) и (2.1.14) позволяют выделить основные этапы обработки входной информации в оптимальной СПВО и их физическое содержание.

1. Как следует из алгоритма (2.1.11) и схемы (рис. 2.1) M -мерный процесс, поступающий с выхода элементов АР, подвергается фильтрации с помощью M -мерного фильтра. Результатом этой фильтрации, определенным в частотной области, является скалярное произведение $X^T(f)H(f)$, которому во временной области отвечает скалярный процесс $u(t)$ на выходе сумматора многомерного фильтра. Многомерная фильтрация обеспечивает пространственно-временное обеление поля шума, что осуществляется путем умножения вектора X^T на матрицу N^{-1} , т. е. в результате вычисления вектора-строки $X^T N^{-1}$. В соответствии с (2.1.14) n -я компонента

этого вектора-строки есть сумма $\sum F_{mn} X_m$ для фиксированной величины n . Далее, умножение вектора-строки $X^T N^{-1}$ на вектор-столбец L_s дает скаляр-билинейную форму $X^T N^{-1} \bar{L}_s$, являющуюся изображением выхода сумматора многомерного фильтра во временной области $u(t)$. Этой операции соответствует суммирование произведений величин $\exp\{j \cdot 2\pi f \tau_n\}$ и $\sum F_{mn} X_m$ по переменной n . Полезна еще и такая трактовка процедуры фильтрации: введем диагональную матрицу

$$V_s(f) = \begin{bmatrix} e^{-j \cdot 2\pi f \tau_0} & & & 0 \\ & e^{-j \cdot 2\pi f \tau_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{-j \cdot 2\pi f \tau_{M-1}} \end{bmatrix}, \quad (2.1.15)$$

m -й элемент которой $\exp(-j \cdot 2\pi f \tau_m)$ является изображением временного запаздывания $\delta(t - \tau_m)$. В таком случае для вектора $L_s(f)$ [см. (1.5.10)] справедливо равенство

$$L_s(f) = V_s(f) I, \quad (2.1.16)$$

где I – вектор-столбец, состоящий из M единиц. Поэтому выражение КЧХ многомерного фильтра [см. (2.1.9)] принимает вид

$$H(f) = N^{-1}(f) \bar{V}_s(f) I. \quad (2.1.17)$$

В такой записи матрица N^{-1} отвечает операции обеления, а матрица \bar{V}_s – операции компенсации АР, а поэтому результатом пространственно-временной фильтрации является скалярное произведение $X^T H = X^T N^{-1} \bar{V}_s I$. Отсюда также следует, что вначале осуществляется обеление поля шума, а затем уже компенсация АР. Как будет показано далее, может быть построена оптимальная СПВО с предварительной компенсацией АР в направлении прихода ожидаемого сигнала.

2. Процесс $u(t)$ подвергается далее фильтрации скалярным фильтром с КЧХ $h(f)$ [см. (2.1.10)]. Эта КЧХ зависит как от временных, определяемых спектрами $g_s(f)$ и $g_n(f)$ свойств полей сигнала и шума, так и от их пространственных свойств, характеризуемых квадратичной формой

$$\kappa(f) = L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f). \quad (2.1.18)$$

Если входное отношение с/ш мало, так что $(g_s/g_n)\kappa \ll 1$, то КЧХ [см. (2.1.10)] скалярного фильтра $h(f)$ упрощается и принимает вид

$$h(f) \approx \sqrt{g_s(f)/g_n(f)}, \quad (2.1.19)$$

т. е. КЧХ зависит лишь от временных (частотных) свойств полей сигнала и шума и совпадает с КЧХ фильтра, оптимизирующего обнаружение скалярного стохастического сигнала [9].

3. Квадратичное детектирование и накопление (интегрирование) (см. рис. 2.1), рассматриваемые здесь во временной области, следуют из применения к выражению (2.1.11) формулы Парсеваля и операций свертки, что дает

$$z = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \eta(t-\lambda) u(\lambda) d\lambda \right]^2 dt;$$

$$u(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} h_m(t-\mu) x_m(\mu) d\mu. \quad (2.1.20)$$

Здесь $\eta(t)$ – ИХ скалярного фильтра с КЧХ $h(f)$ [см. (2.1.10)]; $h_m(t)$ – ИХ фильтров с КЧХ $H_m(f)$, образующих многомерный фильтр с векторной КЧХ $H(f)$ [см. (2.1.9)]. Такой переход из частотной области во временную, выполненный на основе правил преобразования Фурье, не удовлетворяет требованию физической возможности многомерного и скалярного фильтров, рассматриваемых как динамические системы, так как для этого необходимо выполнение условий $h_m(t-\mu) = 0$ при $t < \mu$ и $\eta(t-\lambda) = 0$ при $t < \lambda$ [в обоих свертках (2.1.20) верхние пределы интегрирования равны бесконечности].

4. Заключительной операцией оптимальной СПВО является принятие решения об обнаружении, которое осуществляется пороговым устройством путем сравнения индикаторного эффекта z с величиной порога h .

Уточним теперь физический смысл величины $\kappa(f)$ [см. (2.1.18)], которая далее будет неоднократно встречаться. Найдем спектральную плотность процесса $u(t)$ на выходе сумматора многомерного фильтра с КЧХ $H(f)$ [см. (2.1.9)] для случаев, когда входной многомерный процесс обусловлен или сигналом, или шумом. Обозначим эти спектры соответственно через $U_s(f)$ и $U_n(f)$. Подставив в формулу (1.2.8) матрицу ВСПМ сигнала (2.1.3), найдем

$$\begin{aligned} U_s(f) &= \bar{H}^T(f) G_s(f) H(f) = g_s(f) [L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 = \\ &= g_s(f) \kappa^2(f). \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Аналогичным образом для шума определяем

$$\begin{aligned} U_n(f) &= \bar{H}^T(f) G_n(f) H(f) = g_n(f) L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f) = \\ &= g_n(f) \kappa(f). \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Из сравнения последних равенств видно, что отношение с/ш на выходе сумматора многомерного фильтра на частоте f

$$q(f) = U_s(f)/U_n(f) = (g_s(f)/g_n(f)) \kappa(f). \quad (2.1.23)$$

Таким образом, величина $\kappa(f)$ определяет выигрыш в отношении с/ш на выходе сумматора многомерного фильтра оптимальной СПВО по

сравнению с отношением с/ш на входе элемента АР. В случае изотропного шума [см. (1.5.23)] $\kappa(f)$ определяет максимум коэффициента концентрации АР, оптимизируемой с помощью КЧХ [см. (2.1.9)]. При $2d/\lambda < 1$ возникает, как известно [58, 68], явление сверхнаправленности АР. Реализуемая КЧХ получается при ее синтезе с учетом ошибок возбуждения элементов АР [58].

Рассмотрим алгоритм оптимальной СПВО и ее функциональную схему для случая, когда поле сигнала не является плосковолновым. Тогда его матрица ВСПМ на элементах АР $G_s(f)$ не может быть представлена в виде (2.1.3), а поэтому исходное выражение (2.1.2) нельзя упростить, так как тождество (2.1.5) в этом случае неприменимо. Простейшая возможность анализа такой ситуации возникает в случае, если справедливо неравенство $g_s(f) \ll g_n(f)$, и поэтому функционал ОП (2.1.2) может быть выражен с помощью формулы (2.1.8). Так как матрица $G_s(f)$ эрмитова, то существует такая матрица $D(f)$, что $G_s = g_s \bar{D} D^T$, где в отличие от (2.1.3) D – матрица, а не вектор. В результате выражение (2.1.8) принимает вид

$$\Lambda(X) = \int_{-f_B}^{f_B} \frac{g_s(f)}{g_n^2(f)} \|X^T(f) N^{-1}(f) \bar{D}(f)\|^2 df, \quad (2.1.24)$$

где $\|A\|$ – евклидова норма вектора A . В случае когда матрица G_s имеет ранг, равный M , матрица D имеет размер $M \times M$. Из выражения (2.1.24) следует, что в СПВО необходимо реализовать матричный многомерный фильтр, что существенно усложняет систему. В результате обработки M -мерного входного процесса получается также M -мерный выходной процесс. В этом случае для обработки входного процесса необходимо иметь M параллельных каналов вместо одного, как это имеет место для плосковолнового сигнала.

Синтез оптимального алгоритма обнаружения многомерного стохастического сигнала на основе использования решения системы интегральных уравнений. Такой способ широко применяется в задачах синтеза алгоритмов обнаружения скалярного стохастического сигнала [59]. Способ его распространения на многомерный случай очевиден. Исходным соотношением для этого является плотность распределения пространственно-временной реализации поля на элементах АР [см. (1.4.1)] в области $\{t, \vec{r}\}$, а для линейной АР и дискретных временных выборок в области $\{l, m\}$ (см. рис. 1.8). Используем для гипотезы и альтернативы плотности распределения $f(\mathcal{X}|H_0)$ и $f(\mathcal{X}|H_1)$ [см. (1.4.1)], определяемые матрицами корреляций поля шума R_n и аддитивной смесью полей шума и сигнала $R_n + R_s$. Тогда с точностью до постоянного слагаемого, натуральный логарифм ОП определяется выражением

$$\Lambda(\mathcal{X}) = \frac{1}{2} \mathcal{X}^T [R_n^{-1} - (R_n + R_s)^{-1}] \mathcal{X}. \quad (2.1.25)$$

Оптимальный алгоритм обработки (2.1.25), представляющий собой квадратичную форму, может быть записан в развернутом виде (постоянная 1/2 опущена)

$$z = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{l=-L/2}^{L/2-1} \sum_{k=-L/2}^{L/2-1} h(m, i; l, k) x_m(l \Delta) x_i(k \Delta). \quad (2.1.26)$$

Здесь $x_m(l \Delta)$ – выборочное значение входного процесса в момент $t = l \Delta$ на m -м элементе, а весовой множитель

$$h(m, i; l, k) = q_n(m, i; l, k) - q_{ns}(m, i; l, k), \quad (2.1.27)$$

где q_n – элемент матрицы R_n^{-1} ; q_{ns} – элемент матрицы $(R_n + R_s)^{-1}$. В формуле (2.1.26) для связи с предыдущим изложением удобно было принять нумерацию временных отсчетов, отвечающую интервалу времени $[-T/2, T/2]$, в то время как в исходной формуле (1.4.1) эта нумерация отвечает интервалу $[0, T]$. Далее [59], используя пределы $\Delta \rightarrow 0$ и $L \rightarrow \infty$, можно перейти к непрерывному времени, так что $\Delta l \rightarrow t$, $\Delta L/2 \rightarrow T/2$. В таком случае алгоритм обработки (2.1.26), отвечающий теперь уже функционалу ОП, определяется выражением

$$z = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} h(m, i; t_1, t_2) x_m(t_1) x_i(t_2) dt_1 dt_2. \quad (2.1.28)$$

Для завершения синтеза нужно найти весовую функцию $h(m, i; t_1, t_2)$, M^2 значений которой определяются решением системы M^2 интегральных уравнений, непосредственно следующих из основного свойства элементов взаимнообратных матриц

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-T/2}^{T/2} q_n(i, m; t_1, \lambda) r_n(m, h; \lambda, t_2) d\lambda = \\ & = \delta_{ih} \delta(t_2 - t_1); \\ & \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-T/2}^{T/2} q_{ns}(i, m; t_1, \lambda) [r_n(m, h; \lambda, t_2) + \\ & + r_s(m, h; \lambda, t_2)] d\lambda = \delta_{ih} \delta(t_2 - t_1), \end{aligned} \right\} \quad (2.1.29)$$

где $r_n(m, h; t_1, t_2)$ и $r_s(m, h; t_1, t_2)$ – взаимные корреляционные функции полей шума и сигнала на m -м и h -м элементах в моменты t_1 и t_2 ; $i, h = 0, 1, \dots, M-1$; δ_{ih} – символ Кронекера; $\delta(t_2 - t_1)$ – дельта-функция. Решение системы уравнений (2.1.29) в общем случае получить весьма трудно. Когда для входных процессов справедливо условие $T \gg \tau_{кор}$, а сами они стационарные – система (2.1.29) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} q_n(i, m; \lambda - t_1) r_n(m, h; t_2 - \lambda) d\lambda = \\ & = \delta_{ih} \delta(t_2 - t_1); \\ & \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} q_{ns}(i, m; \lambda - t_1) [r_n(m, h; t_2 - \lambda) + \\ & + r_s(m, h; t_2 - \lambda)] d\lambda = \delta_{ih} \delta(t_2 - t_1), \end{aligned} \right\} \quad (2.1.30)$$

где в соответствии с условием $T \gg \tau_{кор}$ вместо пределов интегрирования $\pm T/2$ принято $\pm \infty$. Перейдя к компактной матричной записи (2.1.30), имеем

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} Q_n(\lambda - t_1) R_n(t_2 - \lambda) d\lambda = \delta(t_2 - t_1) E; \\ & \int_{-\infty}^{\infty} Q_{ns}(\lambda - t_1) [R_n(t_2 - \lambda) + R_s(t_2 - \lambda)] d\lambda = \delta(t_2 - t_1) E, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.31)$$

а для алгоритма обработки (2.1.28) аналогично получаем

$$z = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{X}^T(t_1) [Q_n(t_1 - t_2) - Q_{ns}(t_1 - t_2)] \times \\ \times \mathcal{X}(t_2) dt_1 dt_2. \quad (2.1.32)$$

Здесь $R_n(t_2 - t_1)$ и $R_s(t_2 - t_1)$ – матрицы размером $M \times M$, элементами которых являются взаимные корреляционные функции $r_n(m, h; t_1 - t_2)$ и $r_s(m, h; t_1 - t_2)$ [это матрицы-блоки размером $M \times M$, образующие блочные матрицы – см. (1.4.3) – для полей шума R_n и сигнала R_s , и входящие в (2.1.25)]; $Q_n(t_1 - t_2)$ и $Q_{ns}(t_1 - t_2)$ – матрицы размером $M \times M$, элементы которых соответственно $q_n(m, h; t_1 - t_2)$ и $q_{ns}(m, h; t_1 - t_2)$; $\mathcal{X}(t)$ – M -компонентный вектор с составляющими $x_m(t)$. Решение системы (2.1.31) в частотной области находится простейшим образом в результате использования преобразования Фурье

$$B_n(f) = G_n^{-1}(f); \quad B_{ns}(f) = [G_n(f) + G_s(f)]^{-1}, \quad (2.1.33)$$

где матрицы $B_n(f)$ и $B_{ns}(f)$ – Фурье-изображения матриц $Q_n(\tau)$ и $Q_{ns}(\tau)$, а $G_n(f)$ и $G_s(f)$ – матрицы ВСПМ полей шума и сигнала (2.1.3). Матрица $[Q_n(\tau) - Q_{ns}(\tau)]$ определяет алгоритм обработки (2.1.32), который в результате перехода в частотную область трансформируется в алгоритм (2.1.2) и все выражения, приведенные выше. Таким образом, способ применения интегральных уравнений в области $\{t, \vec{r}\}$ приводит к тому же результату, что и непосредственное рассмотрение реализаций полей шума

и сигнала в области $\{f, \vec{r}\}$ – в том и другом случае определяющим конечные результаты является условие $T \gg \tau_{\text{кор}}$.

Метод интегральных уравнений применялся в ряде работ для синтеза оптимальной СПВО [48, 15, 39]. Система уравнений, используемая в этих работах, несколько отличается от системы (2.1.31). Ее можно получить из (2.1.31) в результате выполнения очевидных тождественных преобразований;

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} [Q_n(\lambda - t_1) - Q_{ns}(\lambda - t_1)] [R_n(t_2 - \lambda) + R_s(t_2 - \lambda)] d\lambda = \\ & = C(t_2 - t_1), \\ & \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\lambda - t_1) C(t_2 - \lambda) d\lambda = R_s(t_2 - t_1). \end{aligned} \right\} (2.1.34)$$

Здесь второе уравнение (2.1.34), определяющее матрицу C , обусловлено необходимостью коррекции поля сигнала, которая возникает в результате обеления поля шума, а первое уравнение (2.1.34) определяет матрицу обработки $Q_n - Q_{ns}$ уже для откорректированной матрицы C поля сигнала. Решение системы (2.1.34) совпадает с (2.1.33), так как

$$G_n^{-1} - (G_n + G_s)^{-1} = (G_n + G_s)^{-1} G_s G_n^{-1} G_n^{-1} G_s (G_n + G_s)^{-1}.$$

Система уравнений типа (2.1.34) использовалась в работах [45, 13] для решения задачи синтеза оптимального обнаружителя скалярного стохастического сигнала.

Особенности СПВО узкополосного входного процесса. Положим, что входной процесс ограничен полосой частот $\Delta f = f_n - f_{\text{н}}$ и удовлетворяет на практике условию узкополосности. В таком случае для упрощения реализации СПВО целесообразно воспользоваться свойством узкополосности, перейдя от процессов на выходе элементов АР $x_m(t)$ к их квадратурным составляющим: $x_{mc}(t)$ – косинусной и $x_{ms}(t)$ – синусной. Из алгоритма обработки (2.1.20) видно, что он трансформируется в два алгоритма параллельной обработки каждой из этих составляющих типа (2.1.20), где в первом случае все величины нужно снабдить индексом c , а во втором – s (полагаем, что спектр процесса симметричен относительно несущей частоты f_0). Каждый канал обработки квадратурных составляющих должен иметь свой M -мерный фильтр с КЧХ $H_c(f)$ и $H_s(f)$ соответственно. Функциональная схема каждого из двух квадратурных каналов идентична схеме, представленной на рис. 2.1. В целом же схема оптимальной СПВО для узкополосного входного процесса показана на рис. 2.2, где добавлены стандартные блоки выделения квадратурных составляющих, в которых каждый процесс $x_m(t)$ с выходов элементов АР умножается на $\cos 2\pi f_0 t$ и $\sin 2\pi f_0 t$ и далее осуществляется низкочастотная фильтрация. Таким образом, оптимальная СПВО узкополосного входного процесса может

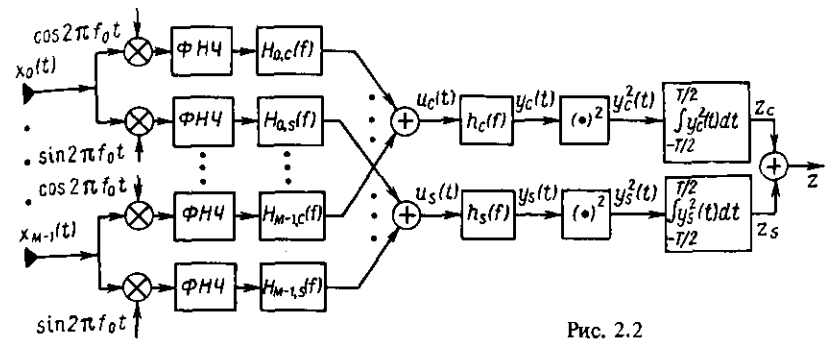


Рис. 2.2

быть упрощена за счет обработки медленно изменяющихся квадратурных составляющих входного процесса.

Такая трактовка СПВО для узкополосных процессов исходит из условия, что $T \gg \tau_{\text{кор}}$ (теперь уже для квадратурных составляющих), а поэтому в системе (2.1.31), определяющей алгоритм обработки, пределы интегрирования принимаются бесконечными. В статьях [15, 48, 49] для узкополосных процессов предложен приближенный способ решения задачи синтеза СПВО, не требующий перехода в системе уравнений (2.1.31) или (2.1.34) к бесконечным пределам интегрирования. Эти пределы остаются конечными и соответствуют интервалу $[-T/2, T/2]$, как и для исходного алгоритма (2.1.26). Для получения решения принимается, что исходя из предположения об узкополосности входного процесса можно „разделить” описание пространственных и временных свойств полей сигнала и шума и представить их матрицы ВСПМ [см. (2.1.3)] в виде: $G_n(f) \approx g_n(f) N(f_0)$; $G_s(f) \approx g_s(f) L_s(f_0) L_s^T(f_0)$, где $|f| \in (f_0 - \Delta f/2, f_0 + \Delta f/2)$; Δf – эффективная ширина спектров; f_0 – фиксированная частота. В таком случае [48] можно заменить решение системы уравнений (2.1.34) в пространственно-временной области отдельными решениями во временной и пространственной областях с использованием вероятностных характеристик временных квадратурных составляющих.

СПВО с предварительной компенсацией АР в направлении ожидаемого сигнала. Функциональная схема такой системы показана на рис. 2.3, где блоки $+\tau_m$ символизируют операцию опережения, компенсирующую запаздывание $-\tau_m$. Математически операцию компенсации можно описать

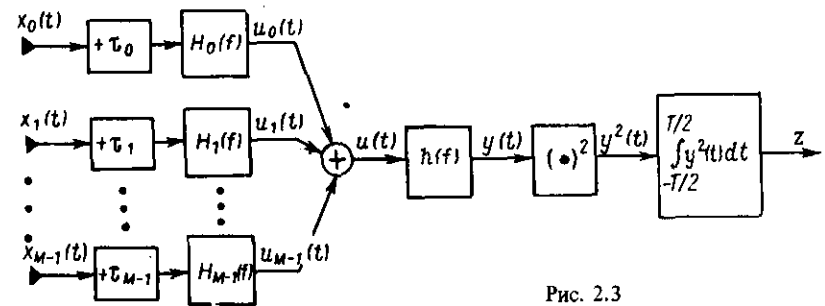


Рис. 2.3

с помощью матрицы $V_s(f)$ (2.1.15), где выходом устройства компенсации является вектор $X = \bar{V}_s X$, m -й элемент которого равен величине $X_m(f) \exp\{j 2\pi f \tau_m\}$. Здесь вектор $X(f)$ определяет, как и выше, изображение процесса на входе АР (входе устройства компенсации).

Синтез оптимальной СПВО с предварительной компенсацией АР аналогичен описанному выше. Отличие заключается лишь в том, что если ранее входному вектору X отвечала спектральная матрица G_x , то вектору X' в соответствии с его определением и формулой (1.2.5) отвечает матрица $G'_x = V_s G_x \bar{V}_s$. Здесь и далее учитываются следующие свойства матрицы V_s [см. (2.1.15)]: $V_s^T = V_s$, $V_s^{-1} = \bar{V}_s$ и $\bar{V}_s^{-1} = V_s$. Таким образом, для решения задачи синтеза рассматриваемой СПВО достаточно заменить матрицы G_s и G_n для сигнала и шума соответственно на матрицы

$$\begin{aligned} G'_s &= V_s G_s \bar{V}_s = V_s \bar{L}_s g_s L_s^T \bar{V}_s = g_s \Pi^T; \\ G'_n &= V_s G_n \bar{V}_s = g_n V_s N \bar{V}_s. \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

Подставив последние величины в равенство (2.1.5) вместо G_s и G_n , а полученные выражения в формулу (2.1.2) для функционала ОП, находим

$$\Lambda(X') = \int_{-f_B}^{f_B} \frac{g_s(f)}{g_n^2(f)} \frac{|X'^T(f) [V_s(f) N(f) \bar{V}_s(f)]^{-1}|^2}{1 + [g_s(f)/g_n(f)] I^T [V_s(f) N(f) \bar{V}_s(f)]^{-1} I} df. \quad (2.1.36)$$

Из алгоритма обработки (2.1.36) видно, что КЧХ многомерного фильтра в такой системе

$$H(f) = [V_s(f) N(f) \bar{V}_s(f)]^{-1} I, \quad (2.1.37)$$

а развернутая запись этого алгоритма

$$\Lambda(X') = \int_{-f_B}^{f_B} h^2(f) \left| \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} F'_{mn}(f) X'_m(f) \right|^2 df \quad (2.1.38)$$

показывает, что в отличие от (2.1.14) здесь пространственно-временное обеление и пространственная фильтрация осуществляются по выходу устройства компенсации — это операции вычисления элементов F'_{mn} обратной матрицы $(V_s N \bar{V}_s)^{-1}$, умножения на X'_m (фильтрации) и суммирования профильтрованной информации. Проанализируем алгоритм обработки (2.1.36). Так как обратная матрица $(V_s N \bar{V}_s)^{-1} = V_s N^{-1} \bar{V}_s$, а вектор $X'^T = (\bar{V}_s X)^T = X^T \bar{V}_s$, то подставив эти величины в выражение (2.1.36) и используя формулу (2.1.16), в соответствии с которой $\bar{V}_s I = \bar{L}_s$ и $I^T V_s = L_s^T$, преобразуем выражение (2.1.36) в (2.1.11). Это означает, что СПВО с предварительной компенсацией АР в направлении ожидаемого сигнала, реализующая процедуру обработки в соответствии с ОП, сохраняет свойства оптимальной СПВО.

Два варианта представления алгоритма оптимальной СПВО. Следуя терминологии, использованной в работе [9] применительно к скалярному процессу, можно сказать, что рассмотренный выше алгоритм оптимальной СПВО [см. (2.1.11)] соответствует оптимальному обнаружителю стохастического многомерного сигнала, реализуемому по схеме многомерный фильтр — скалярный фильтр — квадратор — интегратор. Рассмотрим модификацию этой схемы, для чего вначале несколько преобразуем алгоритм СПВО [см. (2.1.11)], приблизив его к виду, отвечающему реальному представлению входной информации. Так, использование в выражении (2.1.9), определяющем КЧХ многомерного фильтра, нормированной матрицы ВСПМ шума $N(f)$ удобно для теоретических исследований СПВО. Однако на практике такая нормировка невозможна и фактически не нужна. Поэтому вернемся от нормированной матрицы $N(f)$ к ее первоначальному виду $G_n(f) = g_n(f) N(f)$. Тогда вместо формул (2.1.9) и (2.1.10), определяющих КЧХ многомерного и скалярного фильтров $H(f)$ и $h(f)$ и входящих в алгоритм обработки (2.1.11)

$$\begin{aligned} H(f) &= G_n^{-1}(f) \bar{L}_s(f) = \frac{1}{g_n(f)} N^{-1}(f) \bar{L}_s(f); \\ h(f) &= \sqrt{\frac{g_s(f)}{1 + [g_s(f)/g_n(f)] L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)}} \approx \sqrt{g_s(f)}, \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

причем приближенная часть формулы для $h(f)$ отвечает случаю малого входного отношения с/ш, когда $(g_s/g_n) L_s^T N^{-1} \bar{L}_s \ll 1$. Алгоритм (2.1.11) запишем также в виде, отвечающем указанной выше схеме его конкретной реализации,

$$z = \int_{-f_B}^{f_B} |h(f) X^T(f) H(f)|^2 df, \quad (2.1.40)$$

где КЧХ $h(f)$ и $H(f)$ определяются формулами (2.1.39). Сделаем также уточнение временного интервала задания входных реализаций: вместо интервала $[-T/2, T/2]$, удобного при теоретическом рассмотрении, для практической реализации возьмем интервал $[0, T]$. Алгоритм СПВО во временной области, отвечающий такому интервалу, определяется в соответствии с (2.1.40) выражениями, аналогичными (2.1.20):

$$\begin{aligned} z &= \int_0^T \left[\int_{-\infty}^{\infty} \eta(t-\lambda) u(\lambda) d\lambda \right]^2 dt; \\ u(t) &= \sum_{m=0}^{M-1} \int_{-\infty}^{\infty} h_m(t-\mu) x_m(\mu) d\mu, \end{aligned} \quad (2.1.41)$$

где ИХ $\eta(t)$ отвечает КЧХ $h(f)$ [см. (2.1.39)], а ИХ $h_m(t)$ — КЧХ $H_m(f)$, являющейся m -й компонентой вектора $H(f)$ [см. (2.1.39)]. Функциональная схема СПВО остается той же, что и на рис. 2.1; исключения составляют пределы интегрирования накопителя в интервале $[0, T]$.

Рассмотрим теперь второй, модифицированный вариант алгоритма СПВО [21]. Для этого представим в явном виде квадрат модуля подинтегральной функции (2.1.40):

$$z = \int_{-f_B}^{f_B} [\bar{X}^T(f) \bar{H}(f)] [h^2(f) \bar{X}^T(f) H(f)] df =$$

$$= \int_{-f_B}^{f_B} \bar{U}(f) U_s^*(f) df. \quad (2.1.42)$$

Выражение в первых квадратных скобках $U(f) = X^T(f)H(f)$ определяет, как и выше, изображение скалярного процесса на выходе сумматора многомерного фильтра, полученное в результате обеления входного многомерного процесса по шумовому полю. Выражение во вторых квадратных скобках $U_s^*(f) = h^2(f) X^T(f)H(f)$ — изображение оценки сигнала полученной в результате его фильтрации из смеси с шумом. Изображение $U_s^*(f)$ определяет оптимальную оценку сигнала — оптимальную с точки зрения минимума среднеквадратической ошибки этой оценки. В случае малого отношения с/ш в соответствии с (2.1.39) $h(f) = \sqrt{g_s(f)}$, а поэтому изображение оценки сигнала приобретает вид $U_s^*(f) = g_s(f) X^T(f)H(f)$ и имеет ясный физический смысл (см. разд. 3.1). Во временной области алгоритму обработки (2.1.42) отвечают

$$z = \int_0^T u(t) u_s^*(t) dt; \quad u_s^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r_s(t - \lambda) u(\lambda) d\lambda, \quad (2.1.43)$$

где импульсная функция $\eta(t)$, соответствующая изображению $g_s(f)$, есть просто корреляционная функция сигнала $r_s(\tau)$, а процесс $u(t)$ определяется так же, как и во второй формуле (2.1.41). Алгоритмы (2.1.42) и (2.1.43) соответствуют второму варианту оптимальной СПВО, когда оптимальный обнаружитель стохастического многомерного сигнала реализуется по схеме многомерный оценщик — коррелятор. Функциональная схема такой системы показана на рис. 2.4. Из этой схемы видно, что далее после выхода сумматора многомерного фильтра реализуется корреляционное устройство, вычисляющее корреляционный момент процесса $u(t)$ и оптимальной оценки сигнала $u_s^*(t)$.

Синтез оптимального алгоритма обнаружения многомерного детерминированного сигнала. Предпосылки решения этой задачи аналогичны использованным для случая стохастического многомерного сигнала. Оптимальный алгоритм реализует процедуру ОП — отношение плотностей распределения [см. (1.4.10)] $f(X/H_1)$ и $f(X/H_0)$. Причем в первом случае характеристиками распределения являются спектральная матрица $G_n(f_k)$ и вектор математического ожидания $A_s(f_k)$, а во втором — спект-

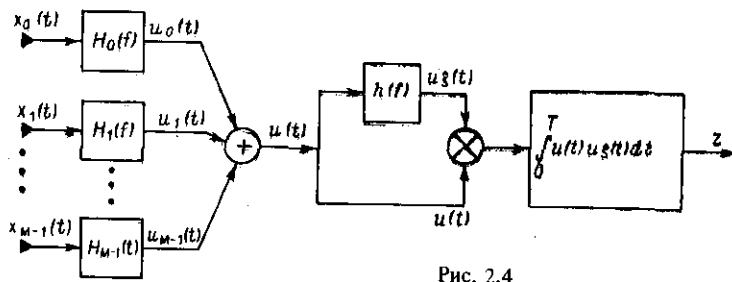


Рис. 2.4

ральная матрица $G_n(f_k)$ и вектор $A_s(f_k) = 0$. Натуральный логарифм ОП определяется в таком случае (с точностью до постоянного слагаемого и множителя) выражением

$$\Lambda(X) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N/2} \text{Re} \left\{ X^T(f_k) G_n^{-1}(f_k) \bar{A}_s(f_k) \right\}, \quad (2.1.44)$$

где $\text{Re} \{ \dots \}$ — вещественная часть. Далее, аналогично (2.1.2), перейдем к непрерывным частотам и функционалу ОП:

$$\Lambda(X) = \int_{-f_B}^{f_B} \text{Re} \left\{ X^T(f) G_n^{-1}(f) \bar{A}_s(f) \right\} df. \quad (2.1.45)$$

Конкретизируем характеристики полей сигнала и шума. Положим, что сигнал плосковолновой, а поэтому, как следует из выражения (1.4.8), вектор $A_s(f) = S(f)L_s(f)$, где скаляр $S(f)$ есть Фурье-изображение детерминированного сигнала $s(t)$ для $t \in (0, T)$, а вектор $L_s(f)$, как и выше, определяется формулой (1.5.10). Для спектральной матрицы шума $G_n(f)$ используем вторую формулу (2.1.3). Тогда алгоритм (2.1.45) принимает вид

$$\Lambda(X) = z = \int_{-f_B}^{f_B} \text{Re} \left\{ \frac{\bar{S}(f)}{g_n(f)} X^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f) \right\} df, \quad (2.1.46)$$

или в развернутом виде, подобно (2.1.14),

$$z = \int_{-f_B}^{f_B} \text{Re} \left\{ \frac{\bar{S}(f)}{g_n(f)} \sum_{n=0}^{M-1} e^{j \cdot 2\pi f \tau_n} \sum_{m=0}^{M-1} F_{mn}(f) X_m(f) \right\} df. \quad (2.1.47)$$

Так же как для задачи обнаружения стохастического сигнала, можно и в рассматриваемом случае выполнить предварительную компенсацию АР в направлении ожидаемого сигнала.

Вариант функциональной схемы оптимальной СПВО для обнаружения детерминированного сигнала показан на рис. 2.5 [временную часть этой схемы обработки найдем, применяя формулу Парсеваля к выражению (2.1.47), уточненному [см. (2.1.38)] для случая предварительной компенсации АР].

Из сравнения алгоритма оптимального обнаружения стохастического сигнала (2.1.11), где $h(f)$ определяется формулой (2.1.19), и алгоритма обнаружения детерминированного сигнала (2.1.46) следует, что КЧХ многомерного фильтра в этих системах одинаковые. Они отличаются лишь послесумматорной частью: вместо скалярного фильтра с КЧХ $h(f) = \sqrt{g_s(f)/g_n(f)}$ используется фильтр с КЧХ $h(f) = S(f)/g_n(f)$.

Эти же результаты получаются при использовании метода интегральных уравнений. Аналогично задаче обнаружения скалярного детерминированного сигнала [42] в многомерном случае (подобно (2.1.32) и (2.1.34)) система M интегральных уравнений имеет вид

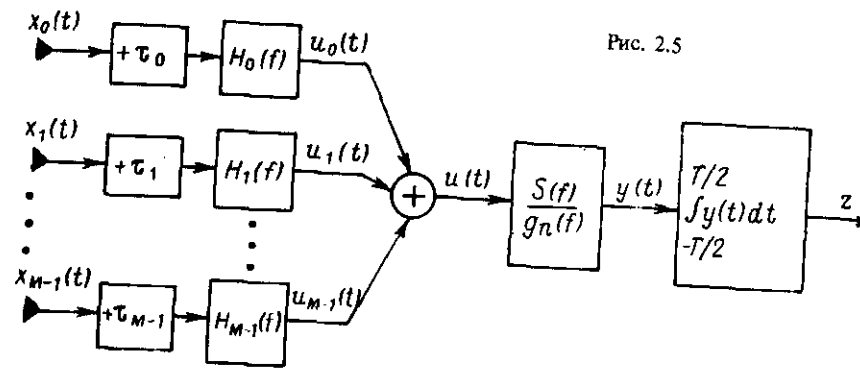


Рис. 2.5

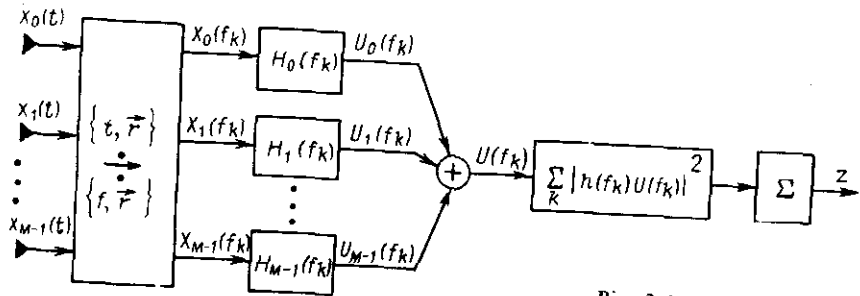


Рис. 2.6

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_n(t - \lambda) \mathcal{B}(\lambda) d\lambda = S(t), \quad (2.1.48)$$

где $R_n(t)$ – корреляционная матрица $M \times M$ стационарного шума [см. описание уравнений (2.1.32)]; $\mathcal{B}(t)$ – M -компонентный искомый весовой вектор; $S(t)$ – M -компонентный вектор реализаций поля плосковолнового сигнала на элементах АР [при записи (2.1.48) принято $T \gg \tau_{\text{кор}}$]. Алгоритм оптимальной обработки M -компонентного вектора реализаций $\mathcal{X}(t)$ процесса на выходе элементов АР

$$\Lambda(X) = \int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{X}^T(t) \mathcal{B}(t) dt = \int_{f_B}^{f_B} X^T(f) \bar{B}(f) df, \quad (2.1.49)$$

где вторая часть равенства (2.1.49) следует из формулы Парсеваля; $X(f)$ и $B(f)$ – Фурье-изображения $\mathcal{X}(t)$ и $\mathcal{B}(t)$. Решение системы (2.1.48), левая часть которой есть свертка, находим, используя преобразования Фурье, в результате чего изображение $B(f) = G_n^{-1}(f) A_s(f)$, где $A_s(f)$ – изображение вектора $S(t)$. Подставляя $B(f)$ в выражение (2.1.49), получим формулу (2.1.46) (интеграл от мнимой части подынтегральной функции равен нулю).

В книге [9] для решения задачи обнаружения многомерного детерминированного сигнала используется векторное разложение Карунена–Лозва. В статье [14] рассмотрена задача синтеза алгоритма оптимального обнаружения для узкополосного шума и многомерного детерминированного сигнала. Особенности решения задачи синтеза здесь аналогичны

использованным в [15, 48], что обсуждалось выше применительно к задаче обнаружения стохастического узкополосного многомерного сигнала. В статье [34] рассмотрен случай двухкомпонентного шумового поля – среды и реверберационной помехи (сигнал тональный).

Особенности реализации алгоритма оптимальной СПВО в частотной области. Алгоритм оптимальной СПВО (2.1.20) и ее структурная схема, приведенная на рис. 2.1, иллюстрировали вариант реализации системы во временной области, точнее в области $\{t, \bar{T}\}$. Вместе с тем из алгоритма СПВО (2.1.11) следует, что система может быть также реализована и в частотной области $\{f, \bar{F}\}$ путем использования величин, содержащихся в этом алгоритме, для совокупности дискретных частот f_k [см. исходное выражение (2.1.1)]. Схема, соответствующая такому варианту реализации СПВО, показана на рис. 2.6. Первый функциональный блок системы должен осуществлять преобразование каждого временного процесса $x_m(t)$ на выходе элементов АР в его Фурье-изображение $X_m(f_k)$, вычисляемое для дискретных частот f_k . Обычно интервал наблюдения T , на котором заданы входные реализации, и интервал их корреляции $\tau_{\text{кор}}$ таковы, что $T \gg \tau_{\text{кор}}$. В связи с этим осуществлять Фурье-преобразование входных реализаций сразу на всем интервале T неоправданно сложно. Это преобразование можно выполнять на некотором интервале обработки T_0 , находящемся в таком соотношении с величинами $\tau_{\text{кор}}$ и T : $\tau_{\text{кор}} \ll T_0 \ll T$. Тогда интервал наблюдения T входных реализаций можно разбить на ряд частей длительностью T_0 и осуществлять Фурье-преобразование входных реализаций последовательно на каждом из интервалов обработки T_0 . В таком случае изображения входных реализаций должны вычисляться для дискретных значений частоты $f_k = k/T_0$. Если выполняется Фурье-преобразование дискретизированных по времени реализаций $x_m(n\Delta)$, то можно использовать алгоритм БПФ [см. (1.5.22)].

Определив таким образом $M(N/2+1)$ изображений $X_m(f_k)$ и имея $M(N/2+1)$ значений КЧХ $H_m(f_k)$, найденных из формулы (2.1.39), можно выполнить процедуру многомерной фильтрации в частотной области, вычислив для каждой m -й компоненты выходное изображение $U_m(f_k) = X_m(f_k)H_m(f_k)$ профильтрованного входного процесса. Сумма M таких изображений $U(f_k) = \sum_m U_m(f_k)$ определяет изображение на частоте f_k процесса на выходе сумматора многомерного фильтра (см. рис. 2.6). Далее, в соответствии с (2.1.40), квадраты модулей величин $h(f_k)U(f_k)$ суммируются для всех значений частоты f_k . Величина полученной таким образом суммы определяет энергию (так как это сумма квадратов модулей составляющих Фурье-изображений для каждой из частот) реализации входного M -мерного процесса $x_m(t)$, оптимально обработанного на интервале времени $(t - T_0, t)$. Далее величины энергии для каждого из этих интервалов длительностью T_0 накапливаются для всего интервала наблюдения T многомерной входной реализации, образуя в результате выходной эффект z . Аналогичным образом может быть реализован в частотной области алгоритм обнаружения детерминированного сигнала (2.1.46).

В заключение рассмотрим особенности формирования ХН в частотной области, следующие из алгоритма (2.1.11) оптимальной СПВО. Для этого удобно принять, что поле шума по пространству некоррелировано, а

поэтому в соответствии с (2.1.9) $H(f_k) = \bar{L}_s(f_k)$. Поэтому пространственная фильтрация на фиксированной частоте f_k сводится в соответствии с алгоритмом (2.1.11), к вычислению скалярного произведения $U(f_k) = X^T(f_k) \bar{L}_s(f_k) = \sum_m X_m(f_k) \exp(j \cdot 2\pi f_k \tau_m)$. Таким образом, формирование ХН в частотной области сводится к вычислению $M(N/2+1)$ величин Фурье-изображений $X_m(f_k)$ и выравниванию их фаз (для данного направления компенсации a_s) путем умножения $X_m(f_k)$ на $\exp(j \cdot 2\pi f_k \tau_m)$. Влияние длительности интервала T_0 на качество ХН рассмотрено в разд. 4.4.

Помехоустойчивость оптимальной СПВО. Рассмотрим случай обнаружения стохастического сигнала и определим характеристики помехоустойчивости СПВО, реализующей оптимальный алгоритм обработки (2.1.11). Строгое решение этой задачи для многомерного ее варианта затруднено по тем же причинам, что и для варианта скалярного – вектор $X(f)$ входит под знак квадрата модуля, так как исходное выражение функционала ОП (2.1.2) содержит эрмитову форму. Поэтому распределение выходного эффекта z СПВО отлично от гауссова даже для входных гауссовых полей.

При анализе помехоустойчивости СПВО будем исходить из предположения, что интервал корреляции входного процесса $\tau_{кор}$ и длительность наблюдения T удовлетворяют условию $T \gg \tau_{кор}$, а поэтому величина z нормализуется [65]. В таком случае характеристики обнаружения – вероятности ложной тревоги P_n и правильного обнаружения P_o – определяются двумя первыми моментами выходного эффекта z для ситуаций H_0 и H_1 соответственно, т. е.

$$P_n = \int_h^\infty f(z|H_0) dz = 1 - \Phi\left(\frac{h - m_0}{\sigma_0}\right); \quad (2.1.50)$$

$$P_o = \int_h^\infty f(z|H_1) dz = 1 - \Phi\left(\frac{h - m_1}{\sigma_1}\right), \quad (2.1.51)$$

где $\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$; h – порог обнаружения; $m_0, m_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2$ – математические ожидания и дисперсии выходного эффекта z в ситуациях H_0 и H_1 .

Определим величину $m_0 = M\{z|H_0\}$. Так как $|X^T H|^2 = \bar{H}^T \bar{X} X^T H$, то используя формулу (2.1.11), находим

$$m_0 = M\{z|H_0\} = \int_{-f_B}^{f_B} h^2(f) \bar{H}^T(f) M\{\bar{X}(f) X^T(f)\} H(f) df. \quad (2.1.52)$$

В соответствии с выражениями (1.1.10) и (1.1.11) для ситуации H_0

$$M\{\bar{X}(f) X^T(f)\} \approx T G_n(f), \quad (2.1.53)$$

а поэтому

$$m_0 = T \int_{-f_B}^{f_B} h^2(f) \bar{H}^T(f) G_n(f) H(f) df. \quad (2.1.54)$$

Подставив в выражение (2.1.54) формулу (2.1.3) для матрицы $G_n(f)$, а также формулы (2.1.9) и (2.1.19) для КЧХ $H(f)$ и $l(f)$ многомерного и скалярного фильтров, находим

$$m_0 = T \int_{-f_B}^{f_B} \frac{g_s(f)}{g_n(f)} L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f) df. \quad (2.1.55)$$

Для ситуации H_1 вместо выражения (2.1.53) получаем

$$\begin{aligned} M\{\bar{X}(f) X^T(f)\} &= T[G_n(f) + G_s(f)] = \\ &= T[g_n(f) N(f) + g_s(f) \bar{L}_s(f) L_s^T(f)], \end{aligned} \quad (2.1.56)$$

в результате, аналогично (2.1.55), определяем

$$\begin{aligned} m_1 = M\{z|H_1\} &= T \int_{-f_B}^{f_B} \left\{ \frac{g_s(f)}{g_n(f)} L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f) + \right. \\ &\left. + \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 \right\} df. \end{aligned} \quad (2.1.57)$$

Далее нам потребуется приращение математического ожидания выходного эффекта z , обусловленного полем сигнала, величина которого $\Delta m = m_1 - m_0$ определяется формулами (2.1.55) и (2.1.57):

$$\Delta m = m_1 - m_0 = T \int_{-f_B}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 df. \quad (2.1.58)$$

Найдем теперь дисперсию σ_0^2 выходного эффекта z (2.1.11) в ситуации H_0 . В соответствии с общим определением дисперсии

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 = D\{z|H_0\} &= \int_{-f_B}^{f_B} \int_{-f_B}^{f_B} h^2(f_1) h^2(f_2) \text{cor}\{|X^T(f_1) H(f_1)|^2, \\ &|X^T(f_2) H(f_2)|^2\} df_1 df_2, \end{aligned} \quad (2.1.59)$$

где $\text{cor}(a, b)$ – корреляционный момент величин a и b . Используя для квадратов модулей $X^T H$ их развернутые выражения, перепишем равенство (2.1.59) в явном виде:

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 = & \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} \int_{-f_B}^{f_B} \int_{-f_B}^{f_B} h^2(f_1) \bar{H}_m(f_1) H_n(f_1) \times \\ & \times h^2(f_2) \bar{H}_k(f_2) H_l(f_2) \text{cor}\{\bar{X}_m(f_1) X_n(f_1), \\ & \bar{X}_k(f_2) X_l(f_2)\} df_1 df_2. \end{aligned} \quad (2.1.60)$$

Для вычисления корреляционного момента в последнем выражении воспользуемся формулой (П9.1.16), полученной в работе [24]. Применительно к использованным выше обозначениям эта формула имеет вид

$$\begin{aligned} \text{cor} \{ \bar{X}_m(f_1) X_n(f_1), \bar{X}_k(f_2) X_l(f_2) \} &\approx \\ &\approx T [g_{mk}(f_1) g_{ln}(f_1) \delta(f_1 + f_2) + g_{ml}(f_1) g_{kn}(f_1) \delta(f_1 - f_2)], \end{aligned} \quad (2.1.61)$$

где $g_{mk}(f), \dots, g_{kn}(f)$ — элементы матрицы $G_n(f)$; $\delta(f)$ — дельта-функция; предполагается, что в интервале частот от f_1 до f_2 спектры процессов приблизительно постоянны. Так как в случае близких частот f_1 и f_2 это предположение справедливо, а для неближких частот f_1 и f_2 при выполнении условия $T \gg \tau_{\text{кор}}$ частотные составляющие изображений практически не коррелированы [см. формулу (1.4.5)], то целесообразно воспользоваться формулой (2.1.61). Подставив ее в выражение (2.1.60), после простых преобразований и возвращения к векторной записи находим

$$\sigma_0^2 = 2T \int_{-f_B}^{f_B} h^4(f) [\bar{H}^T(f) G_n(f) H(f)]^2 df. \quad (2.1.62)$$

Перейдя здесь к величинам, использованным в (2.1.58), получаем

$$\sigma_0^2 = 2T \int_{-f_B}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 df. \quad (2.1.63)$$

Аналогично для ситуации H_1 определяем

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= 2T \int_{-f_B}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 \times \\ &\times [1 + \frac{g_s(f)}{g_n(f)} L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 df. \end{aligned} \quad (2.1.64)$$

Отметим, что в основе вывода формулы (2.1.62) фактически лежит предположение о том, что изображения, входящие в левую часть выражения (2.1.61), коррелированы между собой лишь для совпадающих частот. Поэтому, если это гауссовы величины, то

$$\begin{aligned} M \{ \bar{X}_m(f) X_n(f) \bar{X}_k(f) X_l(f) \} &= M \{ \bar{X}_m(f) X_n(f) \} M \{ \bar{X}_k(f) X_l(f) \} + \\ &+ M \{ \bar{X}_m(f) X_l(f) \} M \{ \bar{X}_k(f) X_n(f) \} = T^2 [g_{mn}(f) g_{kl}(f) + \\ &+ g_{ml}(f) g_{kn}(f)], \end{aligned}$$

так как при $T \gg \tau_{\text{кор}}$ $M \{ X_n(f) X_l(f) \} \approx M \{ \bar{X}_m(f) \bar{X}_k(f) \} \approx 0$. Если же частоты, как в (2.1.61), не совпадают, то

$$\begin{aligned} M \{ \bar{X}_m(f_1) X_n(f_1) \bar{X}_k(f_2) X_l(f_2) \} &= \\ &= M \{ \bar{X}_m(f_1) X_n(f_1) \} M \{ \bar{X}_k(f_2) X_l(f_2) \} + \\ &+ M \{ \bar{X}_m(f_1) X_l(f_2) \} M \{ \bar{X}_k(f_2) X_n(f_1) \} = \\ &= T^2 [g_{mn}(f_1) g_{kl}(f_2) + g_{ml}(f_1) g_{kn}(f_1) \frac{1}{T} \delta(f_1 - f_2)]. \end{aligned}$$

Выражения для величин m_0, m_1, σ_0^2 и σ_1^2 , приведенные выше, можно получить также непосредственно исходя из рассмотрения оконечной части схемы СПВО, изображенной на рис. 2.1 — скалярный фильтр — квадратор — интегратор. При этом следует учесть, что спектр процесса $u(t)$ на выходе сумматора многомерного фильтра определяется для ситуаций H_0 и H_1 соответственно выражениями $\bar{H}^T G_n H$ и $\bar{H}^T (G_n + G_s) H$, а при $T \gg \tau_{\text{кор}}$ процесс на входе интегратора можно рассматривать как белый шум. Тогда для H_0 имеем

$$m_0 = M \{ z \} = TM \{ y^2(t) \} = \text{Tr}_y(0); \quad (2.1.65)$$

$$\sigma_0^2 = D \{ z \} = 2T \int_{-T}^T (1 - |\tau|/T) r_y^2(\tau) d\tau \approx 2T \int_{-\infty}^{\infty} r_y^2(\tau) d\tau, \quad (2.1.66)$$

где $r_y(\tau)$ — корреляционная функция процесса $y(t)$ на входе детектора — выходе скалярного фильтра с КЧХ $h(f)$. Поэтому $r_y(\tau)$ есть обратное Фурье-преобразование спектральной плотности $h^2(f) \bar{H}^T(f) G_n(f) H(f)$. Переходя в формулах (2.1.65) и (2.1.66) к частотному представлению величин, получаем соответственно выражения (2.1.54) и (2.1.62). Для ситуации H_1 величины m_1 и σ_1^2 также определяются формулами (2.1.65) и (2.1.66), где однако $r_y(\tau)$ является обратным Фурье-преобразованием спектральной плотности $h^2(f) \bar{H}^T(f) [G_n(f) + G_s(f)] H(f)$.

Таким образом получены все величины, необходимые для вычисления характеристик помехоустойчивости P_n [см. (2.1.50)] и P_0 [см. (2.1.51)]. Вычисления существенно упрощаются в случае малого входного отношения с/ш, когда можно принять, что оно мало и на выходе сумматора многомерного фильтра, т. е. для (2.1.23) справедливо неравенство $(g_s/g_n) \kappa \ll 1$. В таком случае можно принять [см. (2.1.63) и (2.1.64)], что величины дисперсий выходного эффекта z в ситуациях H_0 и H_1 приблизительно одни и те же, т. е. $\sigma_1^2 \approx \sigma_0^2$. Тогда из формул (2.1.50) и (2.1.51) непосредственно следует, что

$$Q = (m_1 - m_0)/\sigma_0 = \Phi^{-1}(1 - P_n) - \Phi^{-1}(1 - P_0), \quad (2.1.67)$$

где $\Phi^{-1}(b) = a$ — такие числа, что $\Phi(a) = b$. Величина Q определяет отношение приращения математического ожидания выходного эффекта z , обусловленного полем сигнала и равного $\Delta m = m_1 - m_0$, к среднеквадратическому значению σ_0 флуктуаций величины z , обусловленных полем шума. Таким образом, Q является выходным (индикаторным) отношением

с/ш. Из равенства (2.1.67) следует, что при заданной вероятности ложной тревоги $P_{л}$ величина Q определяет вероятность обнаружения

$$P_0 = \Phi[Q - \Phi^{-1}(1 - P_{л})]. \quad (2.1.68)$$

Полученные выше выражения для Δm (2.1.58) и σ_0^2 (2.1.63) позволяют в явном виде определить индикаторное отношение с/ш оптимальной СПВО

$$Q = \frac{m_1 - m_0}{\sigma_0} = \left(T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 df \right)^{1/2}, \quad (2.1.69)$$

где учтено, что подынтегральная функция является четной. Эрмитова форма $L_s^T N^{-1} \bar{L}_s$, входящая в формулу (2.1.69), определяет, как было показано выше (2.1.23), выигрыш оптимальной СПВО в отношении с/ш на выходе сумматора многомерного фильтра по сравнению с отношением с/ш на выходе элемента АР для фиксированной частоты. В выражении (2.1.69) для индикаторного отношения с/ш оптимальной СПВО входит величина того же выигрыша, но осредненная [с весом $g_s^2(f)/g_n^2(f)$] в полосе частот обрабатываемого процесса. Выбор самой конечной полосы частот должен, очевидно, осуществляться исходя из зависимости величины [см. (2.1.69)] от граничных частот f_B и f_H (если $f_H \neq 0$), т. е. от вычисления $Q(f_B, f_H)$. Приняв для указанной эрмитовой формы обозначение $\kappa(f)$ [см. (2.1.18)], запишем выражение (2.1.69) в компактном виде

$$Q = \left(T \int_0^{f_B} [g_s(f)/g_n(f)]^2 \kappa^2(f) df \right)^{1/2}. \quad (2.1.70)$$

Величина порога h оптимальной СПВО, как это следует из формулы (2.1.50), определяется выражением

$$h = m_0 + \sigma_0 \Phi^{-1}(1 - P_{л}), \quad (2.1.71)$$

где величины m_0 и σ_0 для ситуации H_0 были определены выше, а вероятность ложной тревоги $P_{л}$ должна быть задана. Заметим, что если в полученных выше основных выражениях, определяющих алгоритм обработки (2.1.11) и его помехоустойчивость (2.1.69), перейти к скалярной системе (положив $M=1$), то эти выражения совпадут с формулами, полученными в работе [9] для случая обнаружения слабого сигнала при большом времени наблюдения.

Рассмотрим теперь кратко определение помехоустойчивости оптимальной СПВО, решающей задачу обнаружения детерминированного многомерного сигнала в соответствии с алгоритмом (2.1.46). Процедура, реализуемая этим алгоритмом, линейная, а поэтому z есть гауссова величина, определяющая вероятности $P_{л}$ и P_0 . Плотности распределения величины z в каждой из ситуаций H_0 и H_1 определяются ее первыми двумя моментами. Как нетрудно видеть из (2.1.46), в ситуации H_0 $M\{z\} = 0$, а в ситуации H_1

$$m = M\{z\} = \int_{-f_B}^{f_B} \operatorname{Re} \left\{ \frac{|S(f)|^2}{g_n(f)} L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f) \right\} df. \quad (2.1.72)$$

Дисперсия выходного эффекта z $\sigma^2 = D\{z\}$ одна и та же в обеих ситуациях и равна величине

$$D\{z\} = \int_{-f_B}^{f_B} \int_{-f_B}^{f_B} \frac{S(f_1) \bar{S}(f_2)}{g_n(f_1) g_n(f_2)} \times \\ \times L_s^T(f_1) N^{-1}(f_1) M \left\{ \bar{X}^0(f_1) X^0 T(f_2) \right\} N^{-1}(f_2) \bar{L}_s(f_2) df_1 df_2,$$

где $\bar{X}^0(f)$ — центрированный процесс. Аналогично (1.45), $M \left\{ \bar{X}^0(f_1) X^0 T(f_2) \right\} \approx G_n(f_1) \delta(f_1 - f_2)$, а поэтому $D\{z\} = m^2$, где m определяется формулой (2.1.72). Таким образом, характеристики помехоустойчивости оптимального обнаружителя многомерного детерминированного сигнала определяются, так же как и в скалярном случае, выходным отношением с/ш

$$Q = \frac{m}{\sigma} = \left(2 \int_0^{f_B} \operatorname{Re} \left\{ \frac{|S(f)|^2}{g_n(f)} L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f) \right\} df \right)^{1/2}. \quad (2.1.73)$$

Основные свойства оптимальной СПВО. Главной отличительной особенностью такой системы является реализация ее алгоритмом обработки оптимальных процедур как временной, так и пространственной фильтрации полей шума и сигнала. Причем оптимизация фильтрации последнего вида осуществляется с помощью многомерного фильтра, учитывающего пространственные свойства полей шума и сигнала. В его КЧХ $H(f)$ (2.1.9) последние определяются соответственно матрицей $N^{-1}(f)$ и вектором $\bar{L}_s(f)$. Таким образом многомерный фильтр оптимальной СПВО реализуется на элементах антенны оптимальное амплитудно-фазовое частотно-зависимое распределение, с помощью которого осуществляется управление направленностью антенны и тем самым оптимизируется процедура пространственной фильтрации. Следовательно, различным помехо-сигнальным ситуациям должны отвечать свои КЧХ $H(f)$ многомерного фильтра, т. е. свои свойства направленности АР.

Если шум изотропный и $f = c/2d$, то его поле на элементах АР не коррелировано, и, как следует из (1.5.23), $N(f) = E$, где E — единичная матрица. В таком случае КЧХ $H(f) = \bar{L}_s(f)$, т. е. пространственная фильтрация сводится лишь к традиционной компенсации антенны в направлении ожидаемого сигнала. Положим, что полоса частот (f_H, f_B) относительно узкая, а центральная частота $f_0 = c/2d$; заменив в таком случае (см. разд. 1.5) $g_n(f)$ на $g_n(f) M/K(f)$, из формулы (2.1.69) получаем

$$Q \approx \left(T \int_{-f_H}^{f_B} K^2(f) [g_s(f)/g_n(f)]^2 df \right)^{1/2}. \quad (2.1.74)$$

2.2. Синтез оптимального многомерного фильтра системы пространственно-временной обработки заданной структуры

Оптимальный многомерный фильтр, максимизирующий помехоустойчивость антенной решетки. Помехоустойчивость q АР характеризуют отношением с/ш на ее выходе [58]. Величина помехоустойчивости определяется как собственными параметрами антенны, так и свойствами полей сигнала и шума. Существенным образом помехоустойчивость антенны зависит от амплитудно-фазового распределения на ее элементах, которое в общем случае должно быть частотно-зависимым. Одним из способов введения такого распределения является использование многомерного фильтра, обрабатывающего информацию с выходов элементов антенны. В связи с этим целесообразно рассмотреть задачу синтеза оптимального многомерного фильтра, который бы обеспечивал максимальную помехоустойчивость антенны и сопоставить характеристики такого фильтра с характеристиками фильтра оптимальной СПВО. Задача максимизации помехоустойчивости АР в узкой полосе частот $q(f)$ исследовалась в работе [91], а с учетом ошибок возбуждения — в [58].

Рассматриваемая система — антенна с многомерным фильтром (рис. 2.7), $H_m(f)$ — КЧХ скалярных фильтров, образующих M -мерный фильтр с КЧХ $H(f)$, $m=0, 1, \dots, M-1$. Отношение с/ш $q(f)$ АР определяется отношением спектральных плотностей $U_s(f)$ и $U_n(f)$ процесса $u(t)$ на выходе сумматора многомерного фильтра, обусловленных полями сигнала и шума в отдельности. Используя для спектральных матриц этих полей, как и выше, обозначения $G_s(f)$ и $G_n(f)$, в соответствии с формулой (1.2.8) получим

$$q(f) = \frac{U_s(f)}{U_n(f)} = \frac{\bar{H}^T(f)G_s(f)H(f)}{\bar{H}^T(f)G_n(f)H(f)}. \quad (2.2.1)$$

Для фиксированной частоты f отношение $q(f)$ является скалярной функцией вектор-функции $H(f)$. Найдем вектор-функцию $H_0(f)$, обеспечивающую экстремум этому отношению при заданных матрицах $G_s(f)$ и $G_n(f)$, а также определим его максимальное значение $q_{\max}(f)$. Для этого нужно решить уравнение

$$\nabla_H \left\{ \frac{\bar{H}^T(f)G_s(f)H(f)}{\bar{H}^T(f)G_n(f)H(f)} \right\} = 0, \quad (2.2.2)$$

где градиент ∇_H означает операцию дифференцирования по векторной переменной $H(f)$, т. е. по M вещественным и M мнимым составляющим $\text{Re}H_m(f)$ и $\text{Im}H_m(f)$ вектора $H(f)$, $m=0, 1, \dots, M-1$. Выполнив диф-

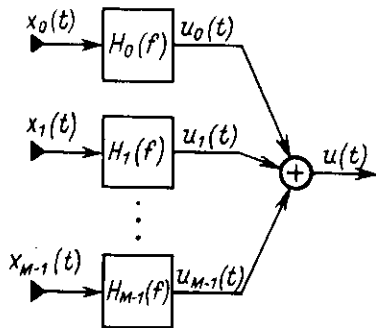


Рис. 2.7

ференцирование дроби (2.2.2), получаем необходимое условие экстремума отношения (2.2.1)

$$\nabla_H \left\{ \frac{\bar{H}^T(f)G_s(f)H(f)}{\bar{H}^T(f)G_n(f)H(f)} \right\} - \frac{\bar{H}^T(f)G_s(f)H(f)}{\bar{H}^T(f)G_n(f)H(f)} \nabla_H \left\{ \frac{\bar{H}^T(f)G_n(f)H(f)}{\bar{H}^T(f)G_n(f)H(f)} \right\} = 0. \quad (2.2.3)$$

Чтобы определить в явном виде левую часть этого уравнения, необходимо знать производную по вектору H эрмитовой формы \bar{H}^TGH , являющейся вещественной скалярной величиной. Эта производная есть вектор, определяемый следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_H \left\{ \bar{H}^TGH \right\} &= \nabla_{\text{Re}H} \left\{ \bar{H}^TGH \right\} + j \nabla_{\text{Im}H} \left\{ \bar{H}^TGH \right\} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \text{Re}H_0} \\ \frac{\partial}{\partial \text{Re}H_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \text{Re}H_{M-1}} \end{pmatrix} \left(\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} g_{mn} \bar{H}_m H_n \right) + j \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \text{Im}H_0} \\ \frac{\partial}{\partial \text{Im}H_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \text{Im}H_{M-1}} \end{pmatrix} \left(\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} g_{mn} \bar{H}_m H_n \right). \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Зафиксируем некоторую k -ю составляющую H_k вектора H и найдем производные эрмитовой формы, взятые по величинам $\text{Re}H_k$ и $\text{Im}H_k$. Предварительно выделим члены эрмитовой формы, зависящие от этих величин:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} g_{mn} \bar{H}_m H_n &= \bar{H}_k H_k g_{kk} + \bar{H}_k \sum_{n \neq k}^{M-1} g_{kn} H_n + \\ &+ H_k \sum_{m \neq k}^{M-1} g_{mk} \bar{H}_m + \sum_{m \neq k}^{M-1} \sum_{n \neq k}^{M-1} g_{mn} \bar{H}_m H_n. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Для определения требуемых производных нужны лишь три первых слагаемых правой части (2.2.5), зависящие от величин $\text{Re}H_k$ и $\text{Im}H_k$, входящих в H_k и \bar{H}_k . Четвертое слагаемое от этих величин не зависит и при дифференцировании по ним равно нулю. Обозначим сумму первых трех слагаемых правой части (2.2.5) через B_k . Так как в силу известного свойства эрмитовой матрицы G справедливо равенство $g_{mk} = \bar{g}_{km}$, то

$$\begin{aligned} B_k &= g_{kk} (\text{Re}^2 H_k + \text{Im}^2 H_k) + 2 \left[\text{Re} H_k \text{Re} \left\{ \sum_{n \neq k} g_{kn} H_n \right\} + \right. \\ &\left. + \text{Im} H_k \text{Im} \left\{ \sum_{n \neq k} g_{kn} H_n \right\} \right]. \end{aligned}$$

В результате дифференцирования этого выражения находим

$$\frac{\partial B_k}{\partial \operatorname{Re} H_k} = 2g_{kk} \operatorname{Re} H_k + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n \neq k} g_{kn} H_n \right\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_n g_{kn} H_n \right\};$$

$$\frac{\partial B_k}{\partial \operatorname{Im} H_k} = 2g_{kk} \operatorname{Im} H_k + 2 \operatorname{Im} \left\{ \sum_{n \neq k} g_{kn} H_n \right\} = 2 \operatorname{Im} \left\{ \sum_n g_{kn} H_n \right\}.$$

На основе выражения (2.2.4) и последних формул можем записать

$$\frac{\partial B_k}{\partial H_k} = \frac{\partial B_k}{\partial \operatorname{Re} H_k} + j \frac{\partial B_k}{\partial \operatorname{Im} H_k} = 2 \sum_{n=0}^{M-1} g_{kn} H_n. \quad (2.2.6)$$

Образовав из этих производных, определенных для $k=0, 1, \dots, M-1$, вектор, находим в явном виде его выражение

$$\nabla_H \left\{ \bar{H}^T(f) G(f) H(f) \right\} = 2G(f) H(f). \quad (2.2.7)$$

В результате применения формулы (2.2.7) к левой части уравнения (2.2.3) и использования обозначения (2.2.1) получаем

$$G_s(f) H(f) - q(f) G_n(f) H(f) = 0. \quad (2.2.8)$$

Так как матрица $G_n(f)$ неособенная, то определение оптимального вектора $H_0(f)$ сводится к решению уравнения

$$G_n^{-1}(f) G_s(f) H(f) = q(f) H(f), \quad (2.2.9)$$

т. е. отысканию собственных значений и собственных векторов матрицы $G_n^{-1} G_s$. Отсюда следует, что максимальная величина отношения с/ш $q(f)$ (2.2.1) является максимальным собственным значением указанной матрицы, а соответствующий ему собственный вектор $H_0(f)$ определяет искомую КЧХ многомерного фильтра. В общем случае решение задачи на определение собственных значений и собственных векторов матрицы весьма сложно. Однако в случае плосковолнового поля сигнала, когда матрица G_s (2.1.3) имеет ранг, равный единице, матрица $G_n^{-1} G_s$ также имеет ранг, равный единице, а следовательно, и одно собственное значение, равное $q_{\max}(f)$. Используя формулы (2.1.3), прямой проверкой убеждаемся, что оптимальная КЧХ многомерного фильтра [см. (2.1.9)] $H_0 = N^{-1} \bar{L}_s$ удовлетворяет уравнению (2.2.9) и превращает его в тождество. При этом величина

$$q_{\max}(f) = [g_s(f)/g_n(f)] L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f) \quad (2.2.10)$$

определяет максимальное значение помехоустойчивости антенны, которое совпадает с выражением (2.1.23), полученным выше для оптимальной СПВО. Таким образом, $q_{\max} = (g_s/g_n) \kappa$, где $\kappa = L_s^T N^{-1} \bar{L}_s$, определяет максимально возможное для данных полей сигнала и шума значение коэффициента усиления антенны с оптимальным амплитудно-фазовым

распределением. Этот коэффициент $\chi(f)$ [68] в общем случае есть отношение с/ш на выходе антенны, нормированное к отношению с/ш на выходе ее отдельного элемента. Таким образом, в случае использования на элементах АР амплитудно-фазового распределения, определяемого в рассмотренном случае выражением (2.1.9), максимальное значение коэффициента усиления АР $\chi_{\max}(f) = \kappa(f)$. Интересно, что решение задачи максимизации отношения с/ш (2.2.1) можно получить сразу, если заметить, что оно является фактически отношением Релея и воспользоваться результатами его максимизации [41].

Выполненный анализ дает основание сделать вывод о том, что КЧХ многомерного фильтра оптимальной СПВО (2.1.9), реализующей алгоритм обработки гауссовых стационарных поля шума и плосковолнового поля сигнала в соответствии с процедурой функционала ОП, совпадает с КЧХ фильтра, обеспечивающего максимальную помехоустойчивость АР для тех же полей с произвольным вероятностным распределением.

Оптимальный многомерный фильтр, максимизирующий выходное отношение с/ш энергетического обнаружителя. Дополним систему с многомерным фильтром (см. рис. 2.7), трактом обработки, содержащим квадратичный детектор и интегратор (фактически это накопитель с прямоугольным временным окном $[t + T/2, t - T/2]$). Предположим, что справедливо условие $T \gg \tau_{\text{кор}}$. Структурная схема рассматриваемой системы изображена на рис. 2.8, где для отличия от предыдущих случаев КЧХ многомерного фильтра вместо $H(f)$ обозначена через $\mathcal{H}(f)$. Из сравнения структурной схемы оптимальной СПВО, изображенной на рис. 2.1, и рассматриваемой системы видно, что алгоритмы обработки информации, реализуемые этими системами, по своему существу совпадают. В последнем случае не определено пока выражение для КЧХ многомерного фильтра $\mathcal{H}(f)$. Найдем эту КЧХ исходя из условия максимизации индикаторного отношения с/ш — отношения приращения математического ожидания Δm выходного эффекта z , обусловленного сигналом, к среднеквадратическому значению σ_0 флуктуаций величины z , обусловленных шумом. Запишем алгоритм обработки, связывающий выходной эффект z в системе (см. рис. 2.8) с изображением входного многомерного процесса $X(f)$. Поскольку системы, изображенные на рис. 2.1 и 2.8, аналогичны, то, как и для выражения (2.1.11),

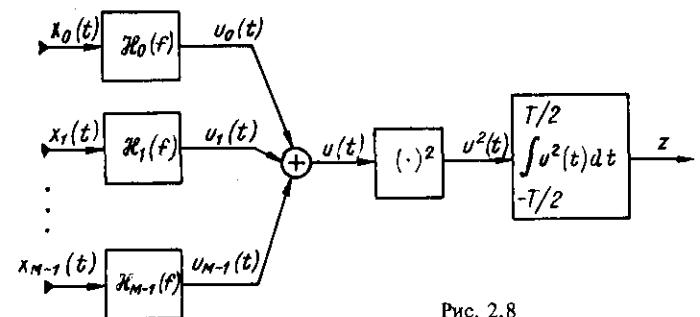


Рис. 2.8

$$z = \int_{-f_B}^{f_B} |X^T(f) \mathcal{X}(f)|^2 df. \quad (2.2.11)$$

Определим вероятностные характеристики выходного эффекта z для ситуаций H_0 и H_1 . Так как формально алгоритм обработки (2.2.11) совпадает с алгоритмом (2.1.11) при условии, что $h(f) = 1$, то для определения величин $\Delta m = m_1 - m_0$ и σ_0^2 можно воспользоваться выражениями (2.1.58) и (2.1.63). В результате получаем

$$\Delta m = m_1 - m_0 = T \int_{-f_B}^{f_B} \bar{\mathcal{X}}^T(f) G_s(f) \mathcal{X}(f) df; \quad (2.2.12)$$

$$\sigma_0^2 = 2T \int_{-f_B}^{f_B} [\bar{\mathcal{X}}^T(f) G_n(f) \mathcal{X}(f)]^2 df. \quad (2.2.13)$$

Определим индикаторное отношение c/π

$$Q = \frac{\Delta m}{\sigma_0} = \frac{\sqrt{T} \int_0^{f_B} \bar{\mathcal{X}}^T(f) G_s(f) \mathcal{X}(f) df}{\left(\int_0^{f_B} [\bar{\mathcal{X}}^T(f) G_n(f) \mathcal{X}(f)]^2 df \right)^{1/2}}, \quad (2.2.14)$$

где учтено, что в (2.2.12) и (2.2.13) подынтегральные функции четные.

Величина Q отношения (2.2.14) является функционалом вектор-функции $\mathcal{X}(f)$, причем если вектор-функция $\mathcal{X}_0(f)$ обеспечивает максимум отношения (2.2.14), то и $\lambda \mathcal{X}_0(f)$, отличающаяся постоянным множителем λ , обеспечивает этот же максимум. Функционал (2.2.14) не совсем обычен — он является функцией интегралов. Задача оптимизации функционалов такого вида рассматривается [72] как задача на условный экстремум, что приводит к уравнению Эйлера

$$\nabla_{\mathcal{X}} \{ \bar{\mathcal{X}}^T(f) G_s(f) \mathcal{X}(f) - \lambda [\bar{\mathcal{X}}^T(f) G_n(f) \mathcal{X}(f)]^2 \} = 0. \quad (2.2.15)$$

Чтобы определить в явном виде левую часть этого уравнения, воспользуемся формулой (2.2.7) для градиента эрмитовой формы. Результат применения этой формулы к первому члену левой части уравнения (2.2.15) очевиден. Чтобы применить эту формулу ко второму члену этого уравнения, предварительно его преобразуем:

$$[\bar{\mathcal{X}}^T G_n \mathcal{X}]^2 = \bar{\mathcal{X}}^T G_n \mathcal{X} \bar{\mathcal{X}}^T G_n \mathcal{X} = \bar{\mathcal{X}}^T G \mathcal{X}.$$

Здесь матрица G новой эрмитовой формы равна произведению трех матриц — G_n , $\mathcal{X} \bar{\mathcal{X}}^T$ и G_n . В результате из (2.2.15) находим

$$2G_s \mathcal{X} - \lambda G_n \mathcal{X} \bar{\mathcal{X}}^T G_n \mathcal{X} = 2 \left(G_s - \frac{\lambda}{2} G_n \mathcal{X} \bar{\mathcal{X}}^T G_n \right) \mathcal{X} = 0. \quad (2.2.16)$$

Так как нас интересует вектор \mathcal{X} , отличный от нуля, то из равенства (2.2.16) получаем окончательную запись уравнения, решение которого и определяет оптимальный вектор $\mathcal{X}(f)$:

$$G_s(f) = \frac{\lambda}{2} G_n(f) \mathcal{X}(f) \bar{\mathcal{X}}^T(f) G_n(f). \quad (2.2.17)$$

Решение этого матричного уравнения находится достаточно просто лишь для плосковолнового поля сигнала, когда его спектральная матрица определяется формулой (2.1.3). В таком случае уравнение (2.2.17) принимает вид

$$g_s(f) \bar{L}_s(f) L_s^T(f) = \frac{\lambda}{2} G_n(f) \mathcal{X}(f) \bar{\mathcal{X}}^T(f) G_n(f). \quad (2.2.18)$$

Умножим слева и справа обе части этого уравнения на матрицу G_n^{-1} и запишем его в следующем „симметричном” виде:

$$\begin{aligned} g_s^{1/2}(f) G_n^{-1}(f) \bar{L}_s(f) g_s^{1/2}(f) L_s^T(f) G_n^{-1}(f) = \\ = \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1/2} \mathcal{X}(f) \bar{\mathcal{X}}^T(f) \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Из этого матричного уравнения находим, что его решение есть вектор $\mathcal{X}(f) = (2/\lambda)^{1/2} g_s^{1/2}(f) G_n^{-1}(f) \bar{L}_s(f)$. Приняв $\lambda = 2$ и используя формулу (2.1.3) для спектральной матрицы G_n поля шума, окончательно получаем

$$\mathcal{X}(f) = \sqrt{g_s(f)} G_n^{-1}(f) \bar{L}_s(f) = \frac{\sqrt{g_s(f)}}{g_n(f)} N^{-1}(f) \bar{L}_s(f). \quad (2.2.20)$$

Из сравнения полученного выражения для КЧХ $\mathcal{X}(f)$ многомерного фильтра, максимизирующего индикаторное отношение c/π энергетического обнаружителя, и КЧХ многомерного и скалярного фильтров оптимальной СПВО, реализующей функционал ОП в случае малого входного отношения c/π [см. выражения (2.1.9), (2.1.11) и (2.1.19)], следует, что КЧХ этих фильтров совпадают, а именно

$$\mathcal{X}(f) = h(f) H(f). \quad (2.2.21)$$

Более того, скалярный множитель $h(f)$ в формуле (2.2.21) позволяет преобразовать структурную схему (см. рис. 2.8) рассматриваемой системы к схеме оптимальной СПВО (см. рис. 2.1), где $h(f) = \sqrt{g_s(f)}/g_n(f)$ — КЧХ послесумматорного скалярного фильтра. Естественно, что и помехоустойчивость этих систем должна быть одна и та же. Действительно, если в отношении (2.2.14) подставить формулу (2.2.20), определяющую оптимальный вектор $\mathcal{X}(f)$, то полученное выражение совпадает с формулой (2.1.69), определяющей помехоустойчивость оптимальной СПВО.

Из выполненного сравнительного анализа оптимальной СПВО и системы с постулированной структурой в виде оптимизированного многомерного фильтра и энергетического обнаружителя следует вывод, аналогичный сделанному выше: рассмотренная система идентична оптимальной СПВО (при малом входном отношении c/ψ), при этом никаких предположений о гауссовом распределении полей сигнала и шума не делалось.

В заключение рассмотрим вариант определения КЧХ многомерного фильтра, максимизирующего индикаторное отношение c/ψ , понимаемое в отличие от отношения (2.2.14) так:

$$Q = \frac{\Delta m}{\sigma_1} = \frac{\sqrt{T} \int_0^{f_B} \bar{\mathcal{X}}^T(f) G_s(f) \mathcal{X}(f) df}{\left(\int_0^{f_B} \{ \bar{\mathcal{X}}^T(f) [G_n(f) + G_s(f)] \mathcal{X}(f) \}^2 df \right)^{1/2}} \quad (2.2.22)$$

Здесь приращение математического ожидания выходного эффекта z , обусловленное сигналом, относится к среднеквадратическому значению σ_1 флуктуаций величины z , вызванных не только шумом, но также и сигналом. Из сравнения выражений (2.2.22) и (2.2.14) и результатов решения задачи максимизации отношения (2.2.14) очевидно, что оптимальный вектор $\mathcal{X}(f)$, максимизирующий отношение (2.2.22), следует из формулы (2.2.20), где достаточно матрицу G_n^{-1} заменить на матрицу $(G_s + G_n)^{-1}$. Если для вычисления $(G_s + G_n)^{-1}$ воспользоваться тождеством (2.1.5), то из выражения (2.2.20) находим оптимальный вектор

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(f) &= \sqrt{g_s(f)} [G_n(f) + G_s(f)]^{-1} \bar{L}_s(f) = \\ &= \frac{\sqrt{g_s(f)}}{g_n(f) + g_s(f) \kappa(f)} N^{-1}(f) \bar{L}_s(f), \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

где величина $\kappa(f)$ определяется формулой (2.1.18). Максимальное значение индикаторного отношения c/ψ находится в результате подстановки оптимального вектора $\mathcal{X}(f)$ (2.2.23) в формулу (2.2.22) и определяется выражением

$$Q = \left(T \int_0^{f_B} \left[\frac{g_s(f)}{g_n(f) + g_s(f) \kappa(f)} \right]^2 \kappa^2(f) df \right)^{1/2}. \quad (2.2.24)$$

Таким образом, задание различных критериев помехоустойчивости системы – (2.2.22) вместо (2.2.14) – приводит к различным выражениям для оптимальной КЧХ многомерного фильтра. Естественно, что и экстремальные значения этих критериев различны. Такой результат закономерен, так как задание критерия эффективности при синтезе системы является субъективным актом – критерий назначается разработчиком системы. Однако, если входное отношение мало, т. е. справедливо условие $(g_s/g_n) \kappa \ll 1$, то результаты оптимизации отношений c/ψ (2.2.14) и (2.2.22) практически совпадают. В случае решения задачи обнаружения детерминированного сигнала системой с заданной структурой, КЧХ оптимального много-

мерного фильтра определяется в результате максимизации отношения c/ψ , по структуре аналогичного (2.2.14), что приводит к алгоритму обработки (2.1.46).

Связь алгоритма оптимального обнаружения многомерного стохастического сигнала и алгоритма оптимального измерения приращения энергии, обусловленной появлением многомерного сигнала. Из предыдущего пункта следует, что оптимальный обнаружитель многомерного стохастического сигнала, структурная схема которого приведена на рис. 2.8, включает в себя многомерный фильтр с КЧХ (2.2.20), квадрататор и интегратор. Если сигнал одномерный, то в соответствующем оптимальном обнаружителе фильтр становится скалярным. Применительно к этому случаю в монографии [45, с. 442] подчеркнуто, что оптимальный обнаружитель „... по существу является прибором для измерения энергии, различающим состояние наличия сигнала и шума и состояние наличия только шума на основе разницы в уровнях энергии, соответствующих этим состояниям”. Такая трактовка физически ясна, интересно дать ее количественную интерпретацию, справедливую в общем случае.

Положим, что на интервале $|t| \leq T/2$ задан стационарный M -мерный процесс $\mathcal{X}(t)$ с составляющими $x_m(t)$, $m=0, 1, \dots, M-1$, представляющий для конкретности выходной процесс АР с M элементами. Пусть математическое ожидание процесса равно нулю, его спектральная матрица есть $G_x(f)$. Подвергнем этот процесс фильтрации с помощью M -мерного фильтра с КЧХ $\mathcal{H}(f)$, а после этого выполним измерение энергии профильтрованного входного процесса (процесса $u(t)$ на выходе сумматора многомерного фильтра), т. е. найдем величину

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} u^2(t) dt. \quad (2.2.25)$$

Энергия E является случайной величиной, а ее моменты представляют собой функционалы КЧХ $\mathcal{H}(f)$. Величины этих моментов определяются видом вектор-функции $\mathcal{H}(f)$. Будем считать, что эта вектор-функция оптимальна, если отношение среднеквадратического отклонения этой оценки к ее математическому ожиданию

$$\epsilon = (D \{E\})^{1/2} / M \{E\} \quad (2.2.26)$$

минимально, и найдем КЧХ $\mathcal{H}(f)$ исходя из этого условия. Как следует из вышесказанного, отношение (2.2.26) обратно отношению (2.2.14), нужно лишь обозначения матриц G_s и G_n заменить на G_x . Поэтому

$$\epsilon = \frac{\left(\int_0^{f_B} \{ \bar{\mathcal{X}}^T(f) G_x(f) \mathcal{X}(f) \}^2 df \right)^{1/2}}{\sqrt{T} \int_0^{f_B} \bar{\mathcal{X}}^T(f) G_x(f) \mathcal{X}(f) df} \quad (2.2.27)$$

КЧХ $\mathcal{H}(f)$ многомерного фильтра, минимизирующего отношение (2.2.27), найдем из формулы (2.2.17), где достаточно принять $G_s = G_n = G_x$. В результате, если произвольная постоянная $\lambda = 2$, получаем уравнение для определения КЧХ

$$\mathcal{H}(f) \bar{\mathcal{H}}^T(f) = G_x^{-1}(f), \quad (2.2.28)$$

из которого видно, что оптимизация измерения мощности многомерного входного процесса требует его пространственно-временного обеления. Это физически вполне оправдано.

Рассмотрим теперь две ситуации: H_0 – наличие только шума и H_1 – наличие шума и сигнала. Определим приращение энергии многомерного процесса при переходе от ситуации H_0 к H_1 . Положим, что входное отношение с/ш мало и примем, что $D\{E|H_1\} \approx D\{E|H_0\}$. В таком случае ошибка измерения интересующего нас приращения энергии многомерного процесса (2.2.27) принимает вид отношения, обратного (2.2.14). Таким образом, $\epsilon = 1/Q$, и минимизация функционала (2.2.27) приводит к тому же решению, что и максимизация функционала (2.2.14), т. е. к вектору $\mathcal{H}(f)$, определяемому формулой (2.2.20). Само же минимальное значение ϵ_{\min} равно величине, обратной Q_{\max} (2.1.69). Таким образом, алгоритмы оптимального обнаружения многомерного стохастического сигнала и алгоритм оптимального измерения приращения энергии, обусловленной появлением этого сигнала, эквивалентны между собой.

Оптимальный скалярный фильтр, максимизирующий индикаторное отношение с/ш в традиционной СПВО. Будем считать традиционной СПВО систему [47, 98], в которой пространственная и временная процедуры обработки организованы в соответствии со структурной схемой, показанной на рис. 2.9. Пространственная обработка включает в себя компенсацию АР в заданном направлении (блоки опережения $+\tau_m$, компенсирующие запаздывания $-\tau_m$ на элементах АР относительно плоского фронта сигнала) и реализацию заданного амплитудно-фазового распределения (блоки $A_m(f)$, где $A_m(f)$ комплексная величина, зависящая в общем случае от частоты) с КЧХ $A(f)$.

Если реализуется только амплитудное частотно независимое распределение, то $A(f) = A$, где a_m – амплитудное распределение на m -м элементе АР. Если же это распределение единичное, то $A(f) = I$, где I вектор из M единиц, т. е. $a_m = 1$. Распределение $A(f)$ задается или синтезируется исходя из требований, предъявляемых к ХН антенны.

Тракт временной обработки системы содержит послесумматорный фильтр с КЧХ $h(f)$, квадрататор и интегратор. Будем полагать, что КЧХ $h(f)$ должна быть определена таким образом, чтобы максимизировать индикаторное отношение с/ш. Найдем это отношение. Из сравнения схем,

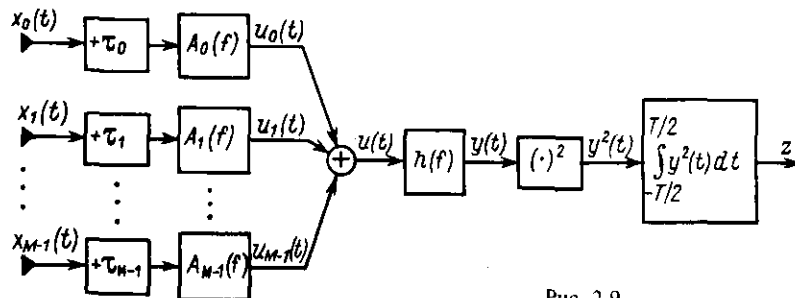


Рис. 2.9

изображенных на рис. 2.8 и 2.9, видно, что вторая схема следует из первой, если принять для нее КЧХ многомерного фильтра

$$\mathcal{H}(f) = \bar{V}_s(f) A(f) h(f), \quad (2.2.29)$$

где матрица $\bar{V}_s(f)$ описывает эффект компенсации АР с помощью операции опережения и является комплексно сопряженной матрице $V_s(f)$ (2.1.15), вектор $A(f)$ задан, а КЧХ $h(f)$ скалярного фильтра является пока неопределенной и должна быть найдена исходя из условия максимизации выходного отношения с/ш. Это отношение следует из формулы (2.2.14) после подстановки туда (2.2.29), что позволяет для матриц ВСПМ $G_s(f)$ и $G_n(f)$ (2.1.3) записать

$$Q = \frac{\sqrt{T} \int_0^{f_B} h^2(f) g_s(f) \bar{A}^T(f) I I^T A(f) df}{\left(\int_0^{f_B} h^4(f) g_n^2(f) [\bar{A}^T(f) V_s(f) N(f) \bar{V}_s(f) A(f)]^2 df \right)^{1/2}} \quad (2.2.30)$$

Величина отношения Q (2.2.30) является функционалом $h(f)$. В результате дифференцирования отношения (2.2.30) по $h(f)$ получаем уравнение Эйлера, определяющее функцию $h(f)$ с точностью до произвольной постоянной λ

$$h(f) \{ g_s(f) \bar{A}^T(f) I I^T A(f) \} - \lambda h^3(f) [g_n(f) \bar{A}^T(f) V_s(f) N(f) \bar{V}_s(f) A(f)]^2 = 0.$$

Отличное от нуля решение этого уравнения дает

$$h(f) = \frac{\sqrt{g_s(f) \bar{A}^T(f) I I^T A(f)}}{g_n(f) \bar{A}^T(f) V_s(f) N(f) \bar{V}_s(f) A(f)}, \quad (2.2.31)$$

где под корнем в числителе спектр сигнала на входе фильтра (выходе сумматора), а в знаменателе спектр шума в этой же точке. Таким образом, оптимальная КЧХ $h(f)$ [см. (2.2.31)] определяется не только вероятностными характеристиками входной информации [спектры $g_s(f)$, $g_n(f)$, матрицы $I I^T$ и $N(f)$], но и характеристиками системы пространственной обработки [матрица $V_s(f)$ системы компенсации АР, векторная КЧХ $A(f)$]. Величина максимального значения отношения (2.2.30), отвечающая оптимальной КЧХ (2.2.31),

$$Q = \left(T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left[\frac{\bar{A}^T(f) I I^T A(f)}{\bar{A}^T(f) V_s(f) N(f) \bar{V}_s(f) A(f)} \right]^2 df \right)^{1/2} \quad (2.2.32)$$

Рассмотрим далее несколько частных случаев:

1. $A(f) = I$ – единичное амплитудное распределение, тогда

$$h(f) = \frac{M \sqrt{g_s(f)}}{g_n(f) L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f)}; \quad (2.2.33)$$

$$Q = M^2 \left(T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left[\frac{1}{L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f)} \right]^2 df \right)^{1/2}, \quad (2.2.34)$$

где использована формула (2.1.16). Введем величину

$$k(f) = L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f), \quad (2.2.35)$$

определяющую спектр шума на выходе сумматора УФХН $L_s^T G_n \bar{L}_s = g_n L_s^T N \bar{L}_s$, нормированный к спектру g_n на выходе элемента АР. Учтем это обозначение и опустим постоянный множитель M в (2.2.33), тогда запишем

$$h(f) = \frac{\sqrt{g_s(f)}}{g_n(f) k(f)};$$

$$Q = M^2 \left(T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \frac{1}{k^2(f)} df \right)^{1/2} \quad (2.2.36)$$

2. $A(f) = I, N(f) = E$ – единичное амплитудное распределение, некоррелированное поле шума (см. разд. 1.5), поэтому $k(f) = M$. Тогда из формул (2.2.36) находим

$$h(f) = \frac{\sqrt{g_s(f)}}{g_n(f)}; \quad Q = M \left(T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} df \right)^{1/2} \quad (2.2.37)$$

где в выражении для $h(f)$ постоянный множитель опущен.

3. $N(f) = E$ – некоррелированное поле шума, тогда

$$h(f) = \frac{\sqrt{g_s(f) \bar{A}^T(f) I I^T A(f)}}{g_n(f) \bar{A}^T(f) A(f)};$$

$$Q = \left(T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left[\frac{\bar{A}^T(f) I I^T A(f)}{A^T(f) A(f)} \right]^2 df \right)^{1/2} \quad (2.2.38)$$

4. $A(f) = A, N(f) = E$ – частотно независимое амплитудное распределение, некоррелированное поле шума. Тогда

$$h(f) = \frac{\sqrt{g_s(f)}}{g_n(f)}; \quad Q = \frac{\left(\sum_{m=0}^{M-1} a_m \right)^2}{\sum_{m=0}^{M-1} a_m^2} \left(T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} df \right)^{1/2} \quad (2.2.39)$$

где в выражении для $h(f)$ постоянный множитель опущен.

5. Рассмотрим традиционную СПВО, в которой при определении КЧХ скалярного фильтра $h(f)$ пространственная корреляция поля шума не учитывается и КЧХ $h(f)$ принимается равной величине (2.1.19), что совпадает с $h(f)$ в (2.2.37) и (2.2.39). Отношение с/ш следует из формулы (2.2.30), куда нужно подставить $h(f) = \sqrt{g_s(f)}/g_n(f)$. Для такого варианта традиционной СПВО имеем

$$h(f) = \frac{\sqrt{g_s(f)}}{g_n(f)};$$

$$Q = \frac{\sqrt{T} \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} A^T(f) I I^T A(f) df}{\left(\int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [\bar{A}^T(f) V_s(f) N(f) \bar{V}_s(f) A(f)]^2 df \right)^{1/2}} \quad (2.2.40)$$

Если к тому же распределение единичное, т. е. $A(f) = I$, то

$$Q = \frac{M^2 \sqrt{T} \int_0^{f_B} [g_s^2(f)/g_n^2(f)] df}{\left(\int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [L_s^T(f) N(f) L_s(f)]^2 df \right)^{1/2}} \quad (2.2.41)$$

И наконец, интересно определить распределение $A(f)$, которое превращает традиционную СПВО в оптимальную, т. е. такую, что выходное отношение с/ш (2.2.30) становится равным (2.1.69). Воспользуемся для этого выражением оптимальной КЧХ многомерного фильтра (2.2.20), полученного при оптимизации отношения с/ш (2.2.14). Подставим в левую часть равенства (2.2.20) выражение (2.2.29), а в правой части этого равенства примем $\bar{L}_s(f) = \bar{V}_s(f) I$. В результате находим, что оптимальное распределение $A(f)$ совпадает с полученным выше выражением (2.1.37) для КЧХ оптимального многомерного фильтра оптимальной СПВО с предварительной компенсацией АР, как это и должно быть.

Оптимизация КЧХ многомерного фильтра СПВО на основе использования неравенства Коши–Буняковского для следов матриц. Указанное неравенство традиционно применяется для оптимизации радиотехнических систем, особенно одномерных. Его можно использовать также и в многомерном случае [88] на основе перехода к следам матриц, а именно если $A(f)$ и $B(f)$ есть эрмитовы матричные функции размером $M \times M$ аргумента f , то

$$\int_F \text{tr} \{ A(f) B(f) \} df \leq \left(\int_F \text{tr}^2 [A(f)] df \right)^{1/2} \left(\int_F \text{tr}^2 [B(f)] df \right)^{1/2}, \quad (2.2.42)$$

где F область определения матричных функций (заметим, что след эрмитовой матрицы – вещественная величина).

Для применения неравенства (2.2.42) к задаче синтеза многомерного фильтра воспользуемся представлением эрмитовой формы через след произведения матриц. Так, для эрмитовых форм, входящих в отношение (2.2.14),

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}^T(f) G_s(f) \mathcal{H}(f) &= \text{tr} [G_s(f) \bar{\mathcal{H}}(f) \bar{\mathcal{H}}^T(f)], \\ \bar{\mathcal{H}}^T(f) G_n(f) \mathcal{H}(f) &= \text{tr} [G_n(f) \bar{\mathcal{H}}(f) \bar{\mathcal{H}}^T(f)], \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

где $\mathcal{H}(f) \bar{\mathcal{H}}^T(f)$ – матрица. Из первого равенства (2.2.43) и неравенства (2.2.42) находим

$$\begin{aligned} \int_0^{f_B} \text{tr} [G_s(f) \mathcal{H}(f) \bar{\mathcal{H}}^T(f)] df &= \int_0^{f_B} \text{tr} [G_s(f) G_n^{-1}(f) G_n(f) \mathcal{H}(f) \bar{\mathcal{H}}^T(f)] df < \\ &\leq \left(\int_0^{f_B} \text{tr}^2 [G_s(f) G_n^{-1}(f)] df \right)^{1/2} \left(\int_0^{f_B} \text{tr}^2 [G_n(f) \mathcal{H}(f) \bar{\mathcal{H}}^T(f)] df \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

В результате применения неравенства (2.2.44) к отношению (2.2.14) получаем

$$Q \leq \left(T \int_0^{f_B} \text{tr}^2 [G_s(f) G_n^{-1}(f)] df \right)^{1/2} \quad (2.2.45)$$

Из (2.2.44) следует, что (2.2.45) превращается в равенство, если матрицы $G_s G_n^{-1}$ и $G_n \mathcal{H} \bar{\mathcal{H}}^T$ отличаются скалярным множителем, т. е. $G_s G_n^{-1} = \lambda G_n \mathcal{H} \bar{\mathcal{H}}^T$ или $G_s = \lambda G_n \mathcal{H} \bar{\mathcal{H}}^T G_n$. Последнее уравнение совпадает с (2.2.17), откуда следует выражение (2.2.20) для оптимальной КЧХ $\mathcal{H}(f)$. В таком случае после перехода от следа произведения матриц к квадратичной форме из равенства (2.2.45) следует выражение (2.1.69).

Сравнительный анализ помехоустойчивости традиционной и оптимальной СПВО. Основой для такого сравнения являются выражения оценки помехоустойчивости этих систем, характеризующиеся индикаторными отношениями с/ш, – оптимальной СПВО [см. (2.1.69)] и двух вариантов традиционных – [см. (2.2.34) и (2.2.41)]. Для различения последних будем обозначать эти величины соответственно через Q_1 и Q_2 .

Сравним между собой вначале оптимальную и первый вариант традиционной СПВО. Для удобства сравнения запишем отношение величин (2.1.69) и (2.2.34), определяющее выигрыш оптимальной СПВО по отношению к первому варианту традиционной системы,

$$\eta_1 = \frac{Q}{Q_1} = \frac{\left(T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 df \right)^{1/2}}{M^2 \left(T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f) [L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f)]^2} df \right)^{1/2}} \quad (2.2.46)$$

СПВО, оптимизированная для данной помехо-сигнальной ситуации, единственная, а обеспечиваемое ею выходное отношение с/ш максимальное. Поэтому отношение (2.2.46) всегда удовлетворяет условию $\eta_1 \geq 1$. Проанализируем физические факторы, которые это объясняют.

1. Оптимизация пространственной обработки приводит к обелению поля шума – обращению его матрицы ВСПМ $N(f)$. В результате, как это видно из (2.2.46), величина Q определяется эрмитовой формой $L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)$, где фигурирует матрица, обратная $N(f)$, а поэтому усиливаются те составляющие пространственных компонент поля сигнала $L_s(f)$, где малы соответствующие частотные составляющие компонент поля шума $N(f)$. Оптимизация же скалярной (временной) фильтрации, основанная на том же физическом явлении, характеризуется отношением спектров $g_s(f)$ и $g_n(f)$, входящих в числитель (2.2.46).

2. В традиционной СПВО пространственная обработка сводится лишь к компенсации антенны в направлении ожидаемого сигнала (амплитудное распределение считаем здесь единичным). Оптимизация временной обработки выполняется скалярным фильтром с КЧХ (2.2.36) уже на выходе сформированного пространственного канала. Эта КЧХ учитывает пространственные свойства поля шума лишь на выходе сумматора УФХН, описываемые эрмитовой формой $L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f)$ – в знаменателе подынтегральной функции Q_1 в (2.2.46). В результате оптимизации процедуры скалярной фильтрации усиливаются те частотные составляющие спектра сигнала $g_s(f)$, где малы соответствующие составляющие спектра шума на выходе уже сформированного пространственного канала, который определяется выражением $g_n(f) [L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f)]$, входящим в знаменатель подынтегральной функции Q_1 . В таком случае возможности оптимизации пространственной фильтрации частично утрачиваются, а поэтому $\eta_1 \geq 1$.

3. Изложенное выше показывает, что степень оптимизации СПВО – величина η_1 [см. (2.2.46)] – определяется свойствами коррелированности поля шума. Если шум на элементах АР не коррелирован, т. е. $N(f) = E$, то из выражения (2.2.46) следует, что $\eta_1 = 1$. Такой результат очевиден: свойства поля шума в различных его точках статистически не различимы, физическая основа для оптимизации отсутствует. Эрмитовы формы $\kappa(f)$ [см. (2.1.18)] и $k(f)$ [см. (2.2.35)] оптимальной и традиционной СПВО, характеризующие выигрыш за счет пространственной обработки, совпадают между собой и для линейной АР равны числу ее элементов M . По мере возрастания коррелированности поля эффект оптимизации сначала возрастает, а затем падает. Случаю сильной корреляции отвечает аддитивная смесь полей слабого некоррелированного на элементах АР шума и сильной плосковолновой помехи, приходящей с того же направления, что и сигнал. Эффективность функционирования оптимальной СПВО в такой помехо-сигнальной ситуации рассмотрим в следующем разделе, где величина Q оптимальной СПВО, являющаяся числителем отношения (2.2.46), определяется формулой (2.3.18).

Из (2.2.46) получаем, что в таком случае величина $\eta_1 = 1$, т. е. выигрыш за счет пространственной оптимизации СПВО отсутствует. Это очевидно: между полем сигнала и аддитивной смесью полей слабого шума

и сильной плоскостной помехи, приходящей с того же направления, что и плоскостной сигнал, практически отсутствует различие в пространственных свойствах.

Изложенное выше становится понятным, если принять, что входной процесс узкополосный, а поэтому отношение интегралов (2.2.46) может быть заменено отношением их подынтегральных функций. Кроме того, положим, что сигнал приходит по нормали к линейной АР с M элементами т. е. $L_s(f) = I$. Тогда из формулы (2.2.46) находим

$$\eta_1 = M^{-2} [I^T N^{-1} I] [I^T N I],$$

где аргумент f опущен. Положим, что свойства пространственной корреляции поля шума таковы, что для m -го и n -го элементов АР коэффициенты корреляции определяются выражением $r^{|m-n|}$, где величина $r < 1$. В таком случае матрицы размером $(M \times M)$ N и N^{-1} [10] имеют вид

$$N = \begin{bmatrix} 1 & r & \dots & r^{M-1} \\ r & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^{M-1} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad N^{-1} = \frac{1}{1-r^2} \begin{bmatrix} 1 & -r & \dots & 0 \\ -r & 1+r^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1+r^2 & -r \\ 0 & \dots & \dots & -r & 1 \end{bmatrix}$$

Соответствующие квадратичные формы, определяемые суммами элементов приведенных выше матриц N и N^{-1} , таковы:

$$I^T N I = M + 2 \sum_{k=1}^{M-1} (M-k) r^k; \quad I^T N^{-1} I = \frac{M - (M-2)r}{r+1}$$

Если $r=0$ (поле шума некоррелировано), то обе приведенные квадратичные формы равны величине M и поэтому $\eta_1 = 1$; если же $r=1$ (поле шума коррелировано по пространству с коэффициентом корреляции единица), то первая форма равна M^2 , а вторая единице, а поэтому также $\eta_1 = 1$. Заметим, что хоть при $r=1$ матрица N и является особенной, однако квадратичная форма $I^T N^{-1} I$ в этом случае существует.

Сравним теперь между собой оптимальную и второй вариант традиционной СПВО. Для этого, как и выше, определим отношение величин (2.1.69) и (2.2.41)

$$\eta_2 = \frac{Q}{Q_2} = \frac{\left(T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 df \right) \times \rightarrow \rightarrow \times \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f)]^2 df \right)^{1/2}}{M^2 \sqrt{T} \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} df} \quad (2.2.47)$$

Во втором варианте традиционной СПВО в КЧХ $h(f)$ [см. (2.2.40)] скалярного фильтра, осуществляющего обработку процесса на выходе сумматора УФХН, не учитываются пространственные свойства поля шума даже в этой точке тракта. Таким образом, второй вариант традиционной СПВО еще менее эффективен, чем первый. Математически это доказывается путем анализа отношения Q_1 [см. (2.2.34)] и Q_2 [см. (2.2.41)]

$$\left(\int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f)]^{-2} df \right)^{1/2} \times \rightarrow \rightarrow \times \left(\int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f)]^2 df \right)^{1/2} \\ \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} df}$$

Применив к числителю этого отношения неравенство Коши–Буняковского, убеждаемся, что $Q_2 \geq Q_1$.

Из приведенных выше выражений, определяющих помехоустойчивость оптимальной и традиционной СПВО, видно, что основные вычисления связаны здесь с определением эрмитовых форм $L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)$ и $L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f)$. При этом главная трудность заключается в обращении матрицы $N^{-1}(f)$, входящей в форму $L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)$. Способы вычисления $N^{-1}(f)$ в некоторых частных, но важных в практическом отношении случаях будут рассмотрены далее. Для традиционной системы величина $g_n(f) L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f)$, входящая в формулу для выходного отношения с/ш, определяет спектр шума на выходе сумматора компенсатора АР с ХН, ось которой ориентирована углом α_s . На этой основе возможно вычисление эрмитовой формы с помощью осевого коэффициента концентрации. Действительно, с одной стороны отношение с/ш на выходе сумматора компенсатора равно величине $[M^2 g_s(f) / (g_n(f) L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f))]$, а с другой – это же отношение равно величине $g_s(f) / (g_n(f) K(f))$, где $K(f)$ – коэффициент концентрации. Отсюда находим, что

$$L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f) = M^2 / K(f). \quad (2.2.48)$$

Так, используя в первом приближении выражение $K(f)$ [58] для непрерывных антенн имеем, что для линейной АР $K(f) \approx 2fMd/c$, а для плоской решетки $K(f) \approx 4\pi f^2 M^2 d^2 \cos \alpha_s / c^2$ (здесь M – общее число элементов решетки, единичное амплитудное распределение).

2.3. Особенности оптимизации системы пространственно-временной обработки, решающей задачу обнаружения сигнала в поле изотропного шума и локальных помех

Выше были кратко рассмотрены основные теоретические положения оптимизации СПВО без конкретизации характера поля помех. Теперь рассмотрим частный случай помеховой ситуации – смеси полей изотропного шума и локальных помех. Именно такая помеховая ситуация рассматривается во многих работах по СПВО [39, 77, 98].

Особенности алгоритмов оптимального обнаружения сигнала в поле изотропного шума и локальных помех. Матрица ВСПМ реализаций поля изотропного шума на элементах АР $G_n(f) = g_n(f)N_0(f)$ определяется формулой (2.1.3). Положим, что поле локальной помехи плосковолновое, так же как и у сигнала. В таком случае матрица ВСПМ локальной помехи $G_p(f)$ определяется формулой, аналогичной (2.1.3),

$$G_p(f) = g_p(f)\bar{L}_p(f)L_p^T(f), \quad (2.3.1)$$

где $g_p(f)$ – спектральная плотность помехи на выходе элемента АР; M -компонентный вектор $L_p(f)$ образован величинами $\exp\{-j2\pi f\theta_m\}$; $\theta_m = \delta_p m$; $\delta_p = (d/c) \sin \alpha_p$; α_p – угол прихода локальной помехи; $m = 0, 1, \dots, M-1$. Значит, матрица ВСПМ шума и локальной помехи определяется суммой матриц

$$G_n(f) + G_p(f) = g_n(f) [N_0(f) + \frac{g_p(f)}{g_n(f)} \bar{L}_p(f)L_p^T(f)] = g_n(f)N(f), \quad (2.3.2)$$

где матрица $N(f)$ – сумма матриц в квадратных скобках. КЧХ многомерного фильтра оптимальной СПВО для такой помехо-сигнальной ситуации следует из формулы (2.1.9) в результате подстановки в нее выражения для $N(f)$ (2.3.2):

$$H(f) = [N_0(f) + \frac{g_p(f)}{g_n(f)} \bar{L}_p(f)L_p^T(f)]^{-1} \bar{L}_s(f). \quad (2.3.3)$$

Алгоритм рассматриваемой оптимальной СПВО определяется выражением (2.1.11), так что

$$z = \int_{-f_B}^{f_B} h^2(f) |X^T(f) [N_0(f) + \frac{g_p(f)}{g_n(f)} \bar{L}_p(f)L_p^T(f)]^{-1} \bar{L}_s(f)|^2 df. \quad (2.3.4)$$

Ее функциональная схема представлена на рис. 2.1, где КЧХ – $H(f)$ [см. (2.3.3)].

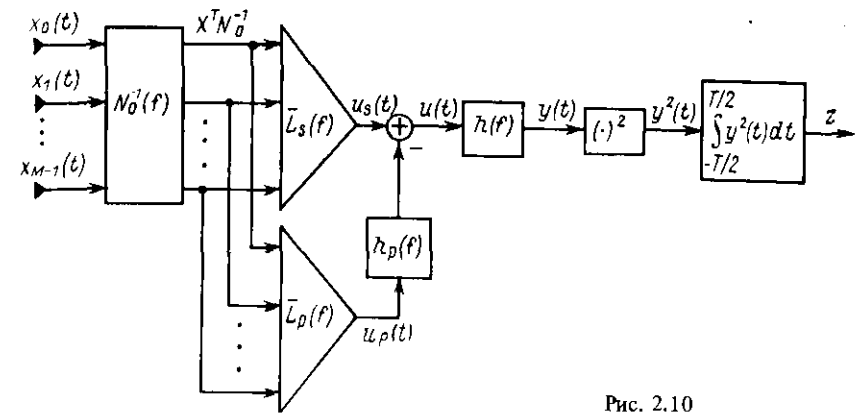


Рис. 2.10

Для нахождения обратной матрицы в (2.3.3) воспользуемся тождеством (2.1.4). В результате получим

$$H(f) = N_0^{-1}(f) [\bar{L}_s(f) - h_p(f)\bar{L}_p(f)], \quad (2.3.5)$$

где

$$h_p(f) = \frac{g_p(f)L_p^T(f)N_0^{-1}(f)\bar{L}_s(f)}{g_n(f) + g_p(f)L_p^T(f)N_0^{-1}(f)L_p(f)}. \quad (2.3.6)$$

Из выражения $H(f)$ (2.3.5) следует модифицированный вариант алгоритма (2.3.4)

$$z = \int_{-f_B}^{f_B} h^2(f) |X^T(f)N_0^{-1}(f)\bar{L}_s(f) - h_p(f)X^T(f)N_0^{-1}(f)\bar{L}_p(f)|^2 df. \quad (2.3.7)$$

Его функциональная схема показана на рис. 2.10. В соответствии с этим вариантом оптимальной СПВО процедура обработки сводится к:

обелению входного процесса по изотропному шуму [обращении матрицы $N_0(f)$ и вычислении вектора-строки $X^T(f)N_0^{-1}(f)$];

компенсации АР для двух различных направлений – сигнала и помехи [скалярному умножению на векторы $\bar{L}_s(f)$ и $\bar{L}_p(f)$]

согласованию процессов на выходах компенсаторов сигнала и локальной помехи [фильтрации второго процесса с помощью фильтра с КЧХ $h_p(f)$];

оптимальной фильтрации с помощью фильтра с КЧХ $h(f)$ и накопления энергии (детектировании и низкочастотной фильтрации).

Особенностью алгоритма (2.3.4) является наличие двух параллельных пространственных каналов обработки – сигнального канала и канала локальной помехи. Исследуем этот алгоритм с помощью его тождественной модификации (2.3.7), а также на основе анализа помехоустойчивости

системы. Для этого воспользуемся выражением индикаторного отношения $c/\text{ш}$ [см. (2.1.69)], откуда после замены матрицы $N(f)$ на ее выражение (2.3.2) и обращения получим

$$Q = \left(T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left\{ L_s^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_s(f) - h_p(f) \bar{L}_p(f) \right\}^2 df \right)^{1/2} \quad (2.3.8)$$

Рассматриваемая СПВО может быть выполнена также с предварительной компенсацией АР в направлении ожидаемого сигнала. В таком случае блоку $N_0^{-1}(f)$ на рис. 2.10 должно предшествовать устройство компенсации, описываемое матричной КЧХ $\bar{V}_s(f)$ [см. (2.1.15)], так же как на рис. 2.3. Тогда алгоритм (2.3.7) преобразуется, подобно (2.1.36), к виду

$$z = \int_{-f_B}^{f_B} h^2(f) |X^T(f) [V_s(f) N_0(f) \bar{V}_s(f)]^{-1} \times [I - h_p(f) V(f) V_s(f) \bar{L}_p(f)]|^2 df. \quad (2.3.9)$$

Анализ оптимальной СПВО, решающей задачу обнаружения сигнала в поле изотропного шума и локальной помехи. Рассмотрим несколько характерных случаев. Пусть мощность локальной помехи существенно больше мощности изотропного шума, т. е. $g_p(f) \gg g_n(f)$. В таком случае из выражения (2.3.6) следует, что

$$h_p(f) \approx [L_p^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_s(f)] / [L_p^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_p(f)] \quad (2.3.10)$$

В результате из формулы (2.3.8) находим

$$Q = \left(T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [L_s^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 \left\{ 1 - \frac{|L_p^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_s(f)|^2}{[L_s^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_s(f)] [L_p^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_p(f)]} \right\} df \right)^{1/2} \quad (2.3.11)$$

Сравним между собой выражения (2.3.11) и (2.1.69), определяющие индикаторные отношения $c/\text{ш}$ при наличии и отсутствии локальной помехи соответственно (изотропный шум присутствует в обоих случаях). Понятно, что величина Q (2.1.69) больше, чем Q (2.3.11). Таким образом, при наличии локальной помехи даже оптимизация СПВО не может обеспечить ту же помехоустойчивость, что и в поле изотропного шума.

Из выражения (2.3.11) видно также, что при неограниченном увеличении мощности локальной помехи ($g_p(f) \rightarrow \infty$) помехоустойчивость оптимальной СПВО стремится к постоянной величине и зависит лишь от спектральных свойств сигнала и шума $g_s(f)$ и $g_n(f)$, а также углов прихода сигнала и локальной помехи. Свойства оптимальной СПВО сохра-

нять постоянную помехоустойчивость при неограниченном увеличении мощности локальной помехи является ее принципиальной особенностью. Физически оно обусловлено наличием двух упомянутых выше пространственных каналов, по каждому из которых „распространяются“ как локальная помеха, так и сигнал. При этом, как следует из процедуры обработки [см. (2.3.7)] и рис. 2.10, из выходного эффекта сигнала канала $u_s(t)$ [изображение которого есть $X^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_s(f)$] вычитается выходной эффект канала помехи $u_p(t)$ [изображение которого есть $X^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_p(f)$], взятый с множителем, отвечающим КЧХ фильтра $h_p(f)$, что обеспечивает согласование выходных эффектов каналов. Механизм этого согласования становится понятным в случае сильной помехи, когда КЧХ $h_p(f)$ (2.3.6) трансформируется в (2.3.10). Последнее выражение определяет значение ХН АР, взятое для угла прихода локальной помехи α_p [см. (2.3.14)]. Рассмотренный эффект можно объяснить и тем, что на основе измерения и обработки возмущения в одном канале (канале помехи) его действие компенсируется в другом канале (канале сигнала) путем прямого вычитания.

В случае совпадения направлений прихода сигнала и локальной помехи [когда $\alpha_p = \alpha_s$, и поэтому $L_p(f) = L_s(f)$] утрачивается возможность пространственной фильтрации помехи и в соответствии с формулами (2.3.5) – (2.3.7) обработка сводится к обелению входного процесса по изотропному шуму, компенсации сигнала и последующей временной фильтрации сигнала с учетом спектров шума и локальной помехи. Помехоустойчивость СПВО в таком случае определяется формулой, следующей из формулы (2.3.8),

$$Q = \left(T \int_0^{f_B} \left[\frac{g_s(f) L_s^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_s(f)}{g_n(f) + g_p(f) L_s^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_s(f)} \right]^2 df \right)^{1/2} \quad (2.3.12)$$

откуда видно, что система обработки перестает быть двухканальной и при $g_p(f) \rightarrow \infty$ отношение $c/\text{ш}$ $Q \rightarrow 0$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда корреляцией шума можно пренебречь, т. е. принять $N_0(f) = E$. Тогда в соответствии с формулой (2.3.6)

$$h_p(f) = \frac{M g_p(f)}{g_n(f) + M g_p(f)} \frac{1}{M} L_p^T(f) \bar{L}_s(f) = \frac{M g_p(f)}{g_n(f) + M g_p(f)} D_{ps}(f), \quad (2.3.13)$$

где

$$D_{ps}(f) = \frac{1}{M} L_p^T(f) \bar{L}_s(f) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j \cdot 2\pi f (\delta_p - \delta_s) m} = \frac{\sin \pi M f (\delta_p - \delta_s)}{M \sin \pi f (\delta_p - \delta_s)} \exp \left\{ -j \pi f (M-1) (\delta_p - \delta_s) \right\}, \quad (2.3.14)$$

определяет ХН линейной дискретной АР, компенсированной в направлении α_s , для угла α_p , а единичные задержки $\delta_s = (d/c) \sin \alpha_s$, $\delta_p = (d/c) \sin \alpha_p$. [Заметим, что здесь допущение $N_0(f) = E$ менее критично, так как в соответствии с (2.3.2) суммарное поле аддитивно и часто $Mg_p(f)/g_n(f) \gg 1$]. Так как $L_s^T L_p = MD_{sp} = MD_{ps}$, то из формулы (2.3.8) следует

$$Q = M \left(T \int_{f_n}^{f_b} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [1 - \gamma(f) R_{ps}^2(f)]^2 df \right)^{1/2}, \quad (2.3.15)$$

где

$$\gamma(f) = \frac{Mg_p(f)}{g_n(f) + Mg_p(f)}; \quad R_{ps}(f) = \frac{\sin \pi Mf(\delta_p - \delta_s)}{M \sin \pi f(\delta_p - \delta_s)}. \quad (2.3.16)$$

$R_{ps}(f)$ — четная функция разности $\delta_p - \delta_s$, т. е. $R_{ps}(f) = R_{sp}(f)$. В оптимальной СПВО при $N_0(f) = E$ (см. рис. 2.10) пространственная фильтрация сводится к раздельной классической компенсации сигнала и локальной помехи, фильтрации выходного эффекта пространственного канала помехи с помощью фильтра с КЧХ (2.3.13) и его вычитанию из выходного эффекта сигнального канала. Из выражения (2.3.13) видно, что в случае сильной локальной помехи, когда $g_p(f) \gg g_n(f)$, $h_p(f) \approx D_{ps}(f)$, т. е. КЧХ согласующего фильтра $h_p(f)$ совпадает с ХН антенны $D_{ps}(f)$ при единичном распределении. Для случая сильной локальной помехи, как видно из формулы (2.3.16), при $g_p(f) \rightarrow \infty$ величина $\gamma(f) \rightarrow 1$, а поэтому выражение (2.3.15) принимает вид

$$Q = M \left(T \int_{f_n}^{f_b} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [1 - R_{ps}^2(f)]^2 df \right)^{1/2}, \quad (2.3.17)$$

что следует также из формулы (2.3.11) при $N_0(f) = E$.

И наконец, при совпадении направлений прихода сигнала и локальной помехи из выражения (2.3.12) для $N_0(f) = E$ получим

$$Q = M \left\{ T \int_{f_n}^{f_b} \left[\frac{g_s(f)}{g_n(f) + Mg_p(f)} \right]^2 df \right\}^{1/2}, \quad (2.3.18)$$

что следует также из формулы (2.3.15) при $\alpha_p = \alpha_s$ и $R_{ps}(f) = 1$.

Сравнительный анализ помехоустойчивости оптимальной и традиционной СПВО в ситуации с локальной помехой. Такой анализ целесообразно провести для случая некоррелированного по элементам АР поля изотропного шума и сигнала, приходящего по нормали к линейной АР, т. е. когда $\alpha_s = 0$. В таком случае индикаторное отношение с/ш оптимальной СПВО определяется формулой (2.3.15), где $\alpha_s = 0$. В качестве традиционных СПВО рассмотрим два их варианта: систему с оптимизированной КЧХ скалярного фильтра $h(f)$ [см. (2.2.31)], и систему с КЧХ $h(f) = \sqrt{g_s(f)/g_n(f)}$. Положим для определенности, что амплитудное распределение на элементах АР традиционных вариантов СПВО единичное, т. е.

$A(f) = I$. При $\alpha_s = 0$ $V_s(f) = E$ и $L_s(f) = I$. В результате для первого варианта традиционной СПВО из выражения (2.2.34) получаем

$$Q_1 = M^2 \left(T \int_0^{f_b} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [I^T N(f) I]^{-2} df \right)^{1/2}. \quad (2.3.19)$$

Для второго варианта СПВО из выражения (2.2.41) при $L_s(f) = I$ находим

$$Q_2 = \frac{M^2 \sqrt{T} \int_0^{f_b} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} df}{\left\{ \int_0^{f_b} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [I^T N(f) I]^2 df \right\}^{1/2}}, \quad (2.3.20)$$

где [см. (2.3.2)]

$$\begin{aligned} I^T N(f) I &= I^T I + \frac{g_p(f)}{g_n(f)} I^T L_p^T(f) L_p(f) I = \\ &= M \left[1 + M \frac{g_p(f)}{g_n(f)} R_{sp}^2(f) \right]. \end{aligned}$$

Сравнение формулы (2.3.15) с (2.3.19) и (2.3.20) позволяет увидеть, что: при неограниченном увеличении мощности локальной помехи [$g_p(f) \rightarrow \infty$] величины Q_1 и Q_2 стремятся к нулю, а Q к (2.3.17);

при $\alpha_p = \alpha_s$ и $R_{ps} = 1$ величины Q , Q_1 и Q_2 одинаковы, так как возможность пространственной фильтрации локальной помехи утрачивается, и при $N_0(f) = E$ алгоритмы обоих традиционных и оптимальной СПВО совпадают;

когда локальная помеха отсутствует, т. е. $g_p(f) = 0$, все три рассматриваемых выражения совпадают и равны величине (2.1.74) при $k(f) = M$, которую обозначим здесь через Q_0 , т. е.

$$Q_0 = M \left(T \int_{f_0}^{f_b} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} df \right)^{1/2}; \quad (2.3.21)$$

если углы α_p и α_s существенно различны, так что $R_{ps}^2(f) \approx 0$ (боковой уровень ХН), то помехоустойчивость всех трех алгоритмов практически одинакова, а ее величина близка к определяемой по формуле (2.3.21).

Приведенные результаты можно также получить, если рассмотреть помехоустойчивость всех трех систем на фиксированной частоте f , когда величины $Q(f)$, $Q_1(f)$ и $Q_2(f)$ определяются их подынтегральными функциями. Полагая, что $N_0(f) = E$, из выражений (2.3.15), (2.3.19) и (2.3.20) определим выигрыш в помехоустойчивости оптимальной СПВО

$$\eta(f) = \frac{Q(f)}{Q_1(f)} = \frac{Q(f)}{Q_2(f)} =$$

$$= 1 + \frac{M^2 g_p^2(f)}{g_n(f)[g_n(f) + M g_p(f)]} R_{ps}^2(f) [1 - R_{ps}^2(f)]. \quad (2.3.22)$$

Отсюда видно, что $\eta(f) = 1$ (выигрыш отсутствует) в двух случаях: когда $R_{ps}^2(f) = 1$ или $R_{ps}^2(f) = 0$, т. е. если угловое отстояние помехи от сигнала (в долях ширины ХН) либо мало, либо велико. Ясно, что максимальную величину $\eta(f)$ легко найти, дифференцируя $\eta(f)$ по $R_{ps}^2(f)$. Максимум имеет место при $R_{ps}^2 = 0,5$, т. е. для угла, отвечающего половине ширины ХН на уровне 0,707. Величина максимума, достигаемого при этом,

$$\eta_{\max}(f) = 1 + \frac{M^2 g_p^2(f)}{4 g_n(f)[g_n(f) + M g_p(f)]} \approx 1 + \frac{M}{4} \frac{g_p(f)}{g_n(f)}. \quad (2.3.23)$$

Для иллюстрации изложенного представим выражение (2.3.22) в виде

$$\eta(f) = 1 + \frac{M^2 q_{pn}^2(f)}{1 + M q_{pn}(f)} R_{ps}^2(f) [1 - R_{ps}^2(f)], \quad (2.3.24)$$

где $q_{pn}(f) = g_p(f)/g_n(f)$ — отношение помеха/шум; $(f/c)d = 0,5$; $\alpha_s = 0$; $R_{ps}(f)$ — соответствует (2.3.16). Зависимость $\eta(f)$, дБ, от угла α_p , град., показана на рис. 2.11 для величин $M = 16$ и $q_{pn} = 10$; 1 и 0,1 (соответственно сплошная линия, пунктир, штрих-пунктир). Половина ширины ХН на уровне 0,707 равна [58] в данном случае величине $0,5 \cdot 100^\circ / (M - 1) \approx 3,5^\circ$, что соответствует, как видно из графика, максимальной величине выигрыша в 16 дБ при $q_{pn} = 10$.

Важно обратить внимание на то, что выигрыш в помехоустойчивости оптимальной СПВО по отношению к традиционной, который неограниченно возрастает при неограниченном увеличении мощности локальной помехи [увеличении отношения $g_p(f)/g_n(f)$], обусловлен соответствующим уменьшением до нуля помехоустойчивости традиционной системы. Помехоустойчивость оптимальной СПВО стремится к постоянной величине [см. (2.3.17)].

Угловой отклик оптимальной СПВО.

Рассмотрим оптимальную СПВО, синтезированную для решения задачи обнаружения сигнала, ожидаемого с данного направления α_s в условиях действия локальной помехи с данного направления α_p . Положим, что сигнал может придти с различных направлений, определяемых в каждом случае углом α (в частном случае $\alpha = \alpha_s$ или $\alpha = \alpha_p$). Под угловым откликом (УО) оптимальной СПВО

будем понимать зависимость мощности выходного эффекта z от угла α прихода плоской волны и обозначать эту зависимость $P_s(\alpha)$. Фактически это есть математическое ожидание величины z , равное для фиксированного угла α мощности процесса $y(t)$ на выходе скалярного фильтра с КЧХ $h(f)$ [см. (2.1.54)], т. е. $P_s(\alpha) = m_z(\alpha) = \delta_y^2(\alpha)$. Для матрицы ВСПМ плосковолнового сигнала, приходящего с направления α , введем обозначение $G_s(f, \alpha) = g_s(f) \bar{L}_\alpha^T(f) L_\alpha^T(f)$, аналогичное $G_s(f)$ (2.1.3), где лишь единичная задержка $\delta_\alpha = (d/c) \sin \alpha$. Так как КЧХ тракта оптимальной СПВО есть $h(f)H(f)$, то

$$P_s(\alpha) = 2T \int_{f_H}^{f_B} h^2(f) \bar{H}^T(f) G_s(f, \alpha) H(f) df. \quad (2.3.25)$$

Для простоты выкладок ограничимся далее рассмотрением некоррелированного по пространству шума, когда $N_0(f) = E$. Используя формулу (2.3.3) для $H(f)$, а для $h(f)$ — (2.1.19), из выражения (2.3.25) находим

$$P_s(\alpha) = 2M^2 T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} |D_{as}(f) - \gamma(f) D_{ap}(f) D_{ps}(f)|^2 df, \quad (2.3.26)$$

где

$$D_{as}(f) = \frac{1}{M} L_\alpha^T(f) \bar{L}_s(f); \quad D_{ap}(f) = \frac{1}{M} L_\alpha^T(f) \bar{L}_p(f),$$

а величины $D_{ps}(f)$ и $\gamma(f)$ определены в (2.3.14) и (2.3.16). Нетрудно убедиться, что $|D_{as} - \gamma D_{ap} D_{ps}| = |R_{as} - \gamma R_{ap} R_{ps}|$, где величины R_{as} и R_{ps} определяются выражениями, аналогичными (2.3.16). Поэтому

$$P_s(\alpha) = 2M^2 T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [R_{as}(f) - \gamma(f) R_{ap}(f) R_{ps}(f)]^2 df. \quad (2.3.27)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи: если $\alpha = \alpha_p$, то величина

$$P_s(\alpha_p) = 2M^2 T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [1 - \gamma(f)]^2 R_{ps}^2(f) df =$$

$$= 2M^2 T \int_{f_H}^{f_B} \left[\frac{g_s(f) R_{ps}(f)}{g_n(f) + M g_p(f)} \right]^2 df \quad (2.3.28)$$

определяет уровень подавления локальной помехи; если к тому же помеха сильная, т. е. $\gamma(f) \rightarrow 1$, то $P_s(\alpha_p) = 0$. Таким образом, при $\alpha = \alpha_p$ возникает „прокол” в кривой УО оптимальной СПВО.

При выполнении расчетов величины УО формулу (2.3.27) удобно нормировать к значению УО при $\alpha = \alpha_s$, равному

$$P_s(\alpha_s) = 2M^2 T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [1 - \gamma(f) R_{ps}^2(f)]^2 df. \quad (2.3.29)$$

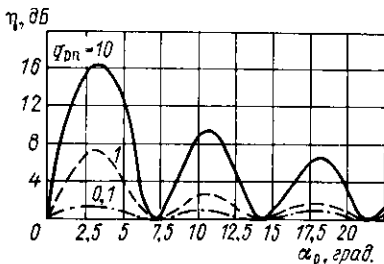


Рис. 2.11

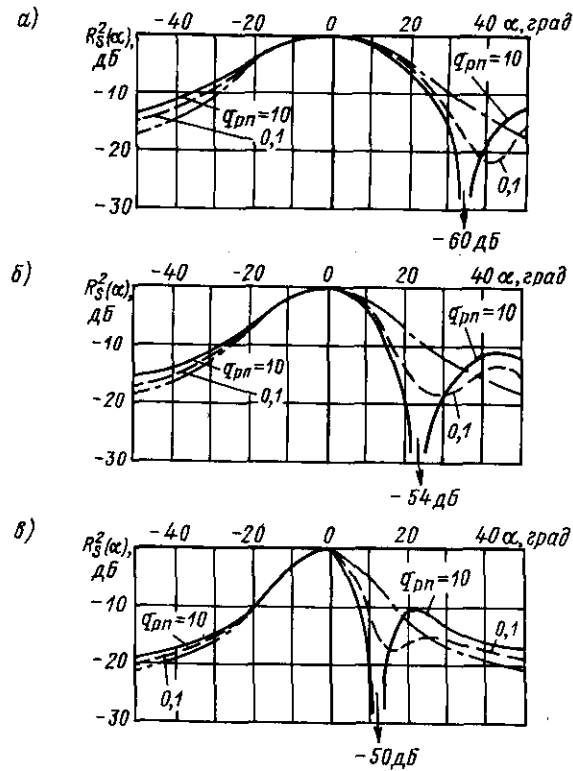


Рис. 2.12

мирована к f_H ; отношения $q_{pn} = 0,1$ и 10 ; величина угла прихода локальной помехи α_p имеет порядок ширины ХН рассматриваемой АР на уровне $0,7$ для каждого из частотных диапазонов; угол прихода сигнала $\alpha_s = 0$. Расчетная формула имеет вид

$$R_s^2(\alpha) = \frac{\int_1^{2^n} [R_{as}(g) - \gamma R_{ap}(g) R_{ps}(g)]^2 dg}{\int_1^{2^n} [1 - \gamma R_{ps}^2(g)]^2 dg}, \quad (2.3.30)$$

где $g = f/f_H$, а $\gamma = M q_{pn} / (1 + M q_{pn})$. Результаты расчета приведены на рис. 2.12 для $n=1$ — (а), $n=2$ — (б) и $n=3$ — (в); сплошной линии отвечает величина $q_{pn}=10$, пунктирной — $q_{pn}=0,1$, штрих-пунктиру — ХН антенны с единичным распределением.

Индикаторный процесс оптимальной СПВО. Традиционным окончательным устройством системы обработки информации [47, 68] является индикатор. Положим, что данный пространственный канал образован оптимальной СПВО, синтезированной для обнаружения сигнала, который может появиться с направления β в условиях действия локальной помехи с направления α_p . Пусть фактически сигнал приходит с направления α_s , т. е. углы α_s и α_p фиксированы, а угол β может принимать ряд значений, соответствующих направлению осей ряда каналов СПВО. Выходной эффект

Из сравнения величин $P_s(\alpha_s)$ (2.3.29) и (2.3.15) видно, что $P_s(\alpha_s) = 2Q^2$. Обозначим нормированный УО $P_s(\alpha)/P_s(\alpha_s)$ через $R_s^2(\alpha)$. Приведем для примера результаты расчета УО оптимальной СПВО для спектров $g_s(f)$, $g_n(f)$, $g_p(f)$, постоянных в полосе $f_H \leq f \leq f_B$, причем мощности сигнала и помехи нормированы к мощности шума соответственно равны q_{sn} и q_{pn} . Число элементов АР $M=16$. Варьируемые параметры: число октав частотного диапазона $n = \log_2 \rightarrow (f_B/f_H) = 1, 2$ и 3 , причем величина $d = (c/2)/(8f_H)$ и постоянна для всех значений n , а сама частота нор-

СПВО с осью, определяемой углом β , будем обозначать через $z(\beta)$. Естественной оценкой случайной величины $z(\beta)$ является ее математическое ожидание — мощность выходного эффекта. Зависимость мощности $P_\Sigma(\beta)$ от угла β в данной помехо-сигнальной ситуации и определяет индикаторный процесс (ИП) системы. Таким образом, если УО характеризует свойства одной СПВО, то ИП — свойства их совокупности. В соответствии со сказанным для математического представления ИП, аналогично (2.3.25), получим

$$P_\Sigma(\beta) = 2T \int_{f_H}^{f_B} h^2(f) \bar{H}_\beta^T(f) [G_s(f) + G_p(f) + G_n(f)] H_\beta(f) df, \quad (2.3.31)$$

где $H_\beta(f)$ есть КЧХ многомерного фильтра СПВО, ориентированной в направлении ожидаемого угла прихода сигнала β , а поэтому $H_\beta(f)$ определяется формулой (2.3.5), в которой нужно лишь заменить вектор $L_s(f)$ на $L_\beta(f)$, т. е. δ_s на $\delta_\beta = (d/c) \sin \beta$. Так как принято, что $N_0(f) = E$, то из формулы (2.3.5) с учетом обозначений, использованных в (2.3.13) и (2.3.16), находим

$$H_\beta(f) = \bar{L}_\beta(f) - \gamma(f) D_{p\beta}(f) \bar{L}_p(f),$$

где $D_{p\beta}(f) = M^{-1} L_p^T(f) \bar{L}_\beta(f)$.

Нетрудно убедиться, что составляющая $P_\Sigma(\beta)$, обусловленная сигналом, равна величине $P_s(\beta)$ [см. (2.3.27)]. Для этого достаточно в формуле (2.3.27) заменить α_s на β и α на α_s , а также использовать равенство $R_{s\beta} - \gamma R_{sp} R_{p\beta} = R_{\beta s} - \gamma R_{ps} R_{\beta p}$. Составляющая $P_\Sigma(\beta)$, обусловленная локальной помехой, следует из (2.3.31):

$$P_p(\beta) = 2M^2 T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s(f) g_p(f)}{g_n^2(f)} [1 - \gamma(f)]^2 R_{\beta p}^2(f) df. \quad (2.3.32)$$

И наконец, составляющая $P_\Sigma(\beta)$, обусловленная шумом,

$$P_n(\beta) = 2MT \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s(f)}{g_n(f)} [1 - 2\gamma(f) R_{\beta p}^2(f) + \gamma^2(f) R_{\beta p}^2(f)] df. \quad (2.3.33)$$

Рассмотрим, как и выше, некоторые характерные случаи для угла β . Так, если ось пространственного канала СПВО ориентирована в направлении прихода сигнала, то величины $P_p(\alpha_s)$ и $P_n(\alpha_s)$ находятся из приведенных выше формул при $\beta = \alpha_s$, когда $R_{\beta p} = R_{sp} = R_{ps}$, а величина $P_s(\alpha_s)$ определяется по формуле (2.3.29). Если же ось пространственного канала СПВО ориентирована в направлении прихода локальной помехи, величины $P_p(\alpha_p)$ и $P_n(\alpha_p)$ также находятся из последних формул при $\beta = \alpha_p$, когда $R_{\beta p} = R_{pp} = 1$:

$$P_p(\alpha_p) = 2M^2 T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s(f) g_p(f)}{g_n^2(f)} [1 - \gamma(f)]^2 df; \quad (2.3.34)$$

$$P_n(\alpha_p) = 2MT \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s(f)}{g_n(f)} [1 - \gamma(f)]^2 df.$$

Величина $P_s(\alpha_p)$ определена выше формулой (2.3.28). Из этих выражений видно, что в случае сильной помехи ($g_p \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow 1$) все три составляющие ИП $P_\Sigma(\alpha_p)$ стремятся к нулю.

Таким образом, индикаторный процесс $P_\Sigma(\beta)$ определяет суммарную мощность сигнала, локальной помехи и изотропного шума, приведенную к выходу пространственного канала оптимальной СПВО, с осью, ориентированной углом β , так что $P_\Sigma(\beta) = P_s(\beta) + P_p(\beta) + P_n(\beta)$. Из этих трех составляющих лишь $P_s(\beta)$ есть полезное приращение математического ожидания выходного эффекта $\Delta m(\beta)$ [см. (2.1.58)] в данном (отвечающем углу β) пространственном канале, обусловленное сигналом, приходящим с направления α_s .

Величины составляющих ИП $P_p(\beta)$ и $P_n(\beta)$ для ситуации H_0 (отсутствие сигнала), так же как и величина полезной составляющей ИП $P_s(\beta)$ определяют параметры решающего правила (2.1.71). В рассматриваемом случае эти параметры [МО и СКО выходного эффекта $z(\beta)$] таковы: $m_0(\beta) = P_p(\beta) + P_n(\beta)$, а в соответствии с формулами (2.1.58) и (2.1.63) $\sigma_0^2(\beta) = 2\Delta m(\beta) = 2P_s(\beta)$. Таким образом, величина порога (2.1.71)

$$h(\beta) = P_p(\beta) + P_n(\beta) + \sqrt{2P_s(\beta)} \Phi^{-1}(1 - P_n). \quad (2.3.35)$$

Отсюда видно, что если даже исключить составляющие $P_p(\beta) + P_n(\beta)$ из ИП $P_\Sigma(\beta)$, а также из пороговой величины $h(\beta)$ для данного канала, ориентированного углом β , то оставшаяся полезная составляющая $P_s(\beta)$ ИП $P_\Sigma(\beta)$, а также остаточная величина порога, равная $h(\beta) - P_p(\beta) - P_n(\beta)$, будут зависеть от параметров помехо-сигнальной ситуации и угла β . Чтобы сделать эти величины одинаковыми для всех пространственных каналов, нужно, как это рекомендуется [77], выход $y(t)$ скалярного фильтра с КЧХ $h(f)$ СПВО (см. рис. 2.1) разделить на величину $\sqrt{P_s(\beta)}$. В таком случае для каждого пространственного канала, образованного СПВО, ось которой ориентирована данным углом β , нормированная полезная составляющая ИП $\Delta m_H(\beta) = P_s(\beta)/P_s(\beta) = 1$, а нормированный порог

$$h_H(\beta) = [h(\beta) - P_p(\beta) - P_n(\beta)]/\sqrt{P_s(\beta)} = \sqrt{2}\Phi^{-1}(1 - P_n). \quad (2.3.36)$$

Они представляют собой одни и те же величины при всех β . При этом индикаторное отношение с/ш Q [см. (2.1.69)] и вероятность правильного обнаружения P_o [см. (2.1.68)] естественно сохраняются и имеют отличные друг от друга величины для каждого пространственного канала:

$$Q(\beta) = \frac{\Delta m(\beta)}{\sigma_0(\beta)} = \left[\frac{1}{2} P_s(\beta) \right]^{1/2}; \quad P_o(\beta) = \Phi[Q(\beta) - \Phi^{-1}(1 - P_n)]. \quad (2.3.37)$$

Причем их максимальные значения отвечают каналу с углом $\beta = \alpha_s$.

Рассмотренная выше нормировка полезна также в следующем смысле. Из изложенного выше видно, что для канала, ориентированного на локальную помеху, а также для соседних каналов в ИП образуется зона подавления, глубина которой определяется интенсивностью локальной помехи. Если же выполнить указанную выше нормировку, то различные каналы будут обладать одним и тем же „коэффициентом передачи по мощности“. В таком случае нормированный ИП для канала, ориентированного углом β ,

$$J_\Sigma(\beta) = \frac{P_\Sigma(\beta)}{P_s(\beta)} = 1 + \frac{P_p(\beta) + P_n(\beta)}{P_s(\beta)}.$$

Оценим эффект нормировки на примере входных процессов с прямоугольными спектрами сигнала, шума и локальной помехи. Воспользовавшись формулами (2.3.27), (2.3.32) и (2.3.33), находим выражение для ИП

$$P_\Sigma'(\beta) = q_{sn} \int_{f_H}^{f_B} [R_{\beta s}(f) - \gamma R_{\beta p}(f) R_{ps}(f)]^2 df + q_{pn}(1 - \gamma)^2 \times \\ \times \int_{f_H}^{f_B} R_{\beta p}^2(f) df + \frac{1}{M} \int_{f_H}^{f_B} [1 - 2\gamma R_{\beta p}^2(f) + \gamma^2 R_{\beta p}^2(f)] df, \quad (2.3.38)$$

где величины γ , q_{pn} и q_{sn} те же, что и использованные при выводе формулы (2.3.30), причем $P_\Sigma'(\beta)$ есть величина $P_\Sigma(\beta)$, деленная на постоянную величину $2M^2 T q_{sn}$. А теперь выполним нормировку ИП $P_\Sigma'(\beta)$ делением на нормирующий множитель $q_{sn} P_s(\beta)$, т. е.

$$q_{pn}(1 - \gamma)^2 \int_{f_H}^{f_B} R_{\beta p}^2(f) df + \\ + \frac{1}{M} \int_{f_H}^{f_B} [1 - 2\gamma R_{\beta p}^2(f) + \gamma^2 R_{\beta p}^2(f)] df \\ J_\Sigma(\beta) = 1 + \frac{\int_{f_H}^{f_B} [R_{\beta s}(f) - \gamma R_{\beta p}(f) R_{ps}(f)]^2 df}{q_{sn} \int_{f_H}^{f_B} R_{\beta s}(f) df}. \quad (2.3.39)$$

Из выражения (2.3.38) следует, что для направления на локальную помеху, когда $\beta = \alpha_p$ [т. е. $R_{\beta p}(f) = 1$], а сама помеха сильная ($q_{pn} \gg 1$), величина $P_\Sigma'(\alpha_p)$ имеет порядок $\sim 1/q_{pn}$. Для тех же условий из выражения (2.3.39) следует, что

$$J_\Sigma(\beta) = 1 + \frac{(q_{pn} + 1/M)(f_B - f_H)}{q_{sn} \int_{f_H}^{f_B} R_{ps}^2(f) df},$$

т. е. нормированная величина ИП $J_\Sigma(\beta)$ при $\beta = \alpha_p$ для сильной помехи имеет порядок величины $\sim q_{pn}$. Таким образом, нормировка ИП $P_\Sigma(\beta)$ путем его деления на величину $P_s(\beta)$ [или, что одно и то же, нормировка

процесса $y(t)$ на выходе скалярного фильтра к величине $\sqrt{P_s(\beta)}$ приближает $P_\Sigma(\beta)$ к его виду, отвечающему угловому распределению интенсивностей процессов на входе СПВО. Завершающим алгоритмом (после исключения из ИП составляющих шума и помехи, а также нормирования) должна быть межканальная обработка ИП (с учетом его коррелированности) путем свертки ИП с сигнальной составляющей.

Анализ процедуры пространственной фильтрации локальной помехи. Основой для такого анализа является КЧХ многомерного фильтра (2.3.5). Для выявления „механизма” пространственной фильтрации рассмотрим случай сильной локальной помехи, когда $g_p(f) \gg g_n(f)$. Предположим, что шум на элементах АР не коррелирован, (т. е. $N_0(f) = E$) а также примем, что сигнал приходит по нормали к линейной АР ($\alpha_s = 0$). В таком случае из выражения (2.3.5) получаем

$$H(f) = I - D_{ps}(f) \bar{L}_p(f), \quad (2.3.40)$$

где ХН АР $D_{ps}(f)$ определяется формулой (2.3.14) при $\delta_s = 0$. Отсюда m -я компонента КЧХ [см. (2.3.40)] многомерного фильтра, т. е. КЧХ скалярного фильтра, обрабатывающего информацию с выхода m -го преобразователя АР,

$$H_m(f) = 1 - D_{ps}(f) e^{j \cdot 2\pi f \delta_p m} = 1 - \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} e^{-j \cdot 2\pi f \delta_p (i - m)}. \quad (2.3.41)$$

Для рассматриваемой помехо-сигнальной ситуации на выходе m -го преобразователя АР в момент t имеется аддитивная смесь сигнала, локальной помехи и изотропного шума

$$x_m(t) = s(t) + p(t - m\delta_p) + n_m(t), \quad (2.3.42)$$

а на выходе фильтра с КЧХ (2.3.41)

$$u_m(t) = s(t) + p(t - m\delta_p) + n_m(t) - \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} s[t - (i - m)\delta_p] - \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} p(t - i\delta_p) - \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} n_m[t - (i - m)\delta_p]. \quad (2.3.43)$$

И наконец, на выходе сумматора многомерного фильтра

$$u(t) = \sum_{m=0}^{M-1} u_m(t) = Ms(t) - \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} s[t - (i - m)\delta_p] + \sum_{m=0}^{M-1} n_m(t) - \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} n_m[t - (i - m)\delta_p]. \quad (2.3.44)$$

Из последнего выражения следует, что на выходе сумматора многомерного фильтра сильная локальная помеха полностью подавляется — режек-

тируется. Вместе с тем, однако, возникает определенная потеря полезного сигнала, а также изменяются характеристики шума. Эти обстоятельства и объясняют уменьшение помехоустойчивости оптимальной СПВО в ситуации, когда действуют шум и сильная локальная помеха, по сравнению с помехоустойчивостью также оптимальной СПВО, но в ситуации, когда локальная помеха отсутствует. Если использовать традиционные понятия, то сказанное выше можно объяснить и тем, что хоть локальная помеха и режективирована, однако за счет деформации ХН (образовании „прокола” в направлении на помеху) произошла некоторая потеря коэффициента концентрации АР, а поэтому и уменьшение помехоустойчивости [см. (2.3.17)] по отношению к помехоустойчивости, определяемой формулой (2.3.21).

Таков „механизм” пространственной фильтрации, осуществляемой многомерным фильтром, когда $g_p(f) \gg g_n(f)$. Если это условие не выполняется, то, как видно из формулы (2.3.5), помеха будет подавляться не полностью, а так, чтобы в сочетании с определенной потерей полезного сигнала обеспечить максимально возможную в такой ситуации помехоустойчивость системы в целом.

Особенности оптимальной СПВО, реализующей задачу обнаружения сигнала при действии нескольких локальных помех. Положим, что действует r локальных помех, приходящих с направлений, определяемых углами α_{p_i} , $i = 1, 2, \dots, r$. Матрицы ВСПМ помех определяются выражениями вида (2.3.1) с соответствующими индексами, так что матрица ВСПМ аддитивной смеси полей шума и локальных помех представляет собой сумму

$$G_r(f) = G_n(f) + \sum_{i=1}^r g_{p_i}(f) \bar{L}_{p_i}(f) L_{p_i}^T(f) = g_n(f) \left[N_0(f) + \sum_{i=1}^r z_i(f) \bar{L}_{p_i}(f) L_{p_i}^T(f) \right], \quad (2.3.45)$$

где $z_i(f) = g_{p_i}(f)/g_n(f)$. В таком случае КЧХ оптимальной СПВО определяется аналогично (2.3.3)

$$H(f) = \left[N_0(f) + \sum_{i=1}^r z_i(f) \bar{L}_{p_i}(f) L_{p_i}^T(f) \right]^{-1} \bar{L}_s(f), \quad (2.3.46)$$

что требует знания обратной матрицы $G_r^{-1}(f)$. Для обращения матриц вида (2.3.45) используются обычно [77] следующие два способа.

Первый заключается в применении последовательно r раз тождества (2.1.4) и использовании рекурсивных соотношений (аргумент f для упрощения записи опущен)

$$G_r^{-1} = \frac{1}{g_n} \left[A_r^{-1} - \frac{A_r^{-1} \bar{L}_{p_r} L_{p_r}^T A_r^{-1}}{z_r^{-1} + L_{p_r}^T A_r^{-1} \bar{L}_{p_r}} \right], \quad (2.3.47)$$

где

$$A_{r-1}^{-1} = A_{r-2}^{-1} - \frac{A_{r-2}^{-1} \bar{L}_{p_{r-1}} L_{p_{r-1}}^T A_{r-2}^{-1}}{z_{r-1}^{-1} + L_{p_{r-1}}^T A_{r-2}^{-1} \bar{L}_{p_{r-1}}},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_1^{-1} = N_0^{-1} - \frac{N_0^{-1} \bar{L}_{p_1} L_{p_1}^T N_0^{-1}}{z_1^{-1} + L_{p_1}^T N_0^{-1} \bar{L}_{p_1}}.$$

Второй способ основан на представлении суммы (2.3.45) в виде

$$G_r(f) = g_n(f) [N_0(f) + \bar{\Lambda}(f) Z(f) \Lambda^T(f)], \quad (2.3.48)$$

где $\Lambda(f)$ — $M \times r$ -матрица, образованная r векторами $L_{p_i}(f)$ с M компонентами, являющимися ее столбцами; $Z(f)$ — $r \times r$ -диагональная матрица с элементами $z_i(f)$. Таким образом, $\bar{\Lambda}(f) Z(f) \Lambda^T(f)$ есть матрица размером $M \times M$. Матрица, обратная $G_r(f)$,

$$G_r^{-1}(f) = \frac{1}{g_n(f)} [N_0(f) + \bar{\Lambda}(f) Z(f) \Lambda^T(f)]^{-1}. \quad (2.3.49)$$

Определим обратную матрицу (2.3.49) на основе использования следующего матричного уравнения:

$$(N_0 + \bar{\Lambda} Z \Lambda^T)^{-1} = N_0^{-1} + N_0^{-1} \bar{\Lambda} X \Lambda^T N_0^{-1}, \quad (2.3.50)$$

где X — $r \times r$ -матрица, которая должна быть найдена из этого уравнения. После умножения обеих частей уравнения справа на $(N_0 + \bar{\Lambda} Z \Lambda^T)$ и простых преобразований находим, что

$$X = - [Z^{-1} + \Lambda^T N_0^{-1} \bar{\Lambda}]^{-1}. \quad (2.3.51)$$

В результате из (2.3.50) и (2.3.49) определяем, что

$$G_r^{-1}(f) = \frac{1}{g_n(f)} N_0^{-1}(f) \times$$

$$\times \left\{ E - \bar{\Lambda}(f) [Z^{-1}(f) + \Lambda^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{\Lambda}(f)]^{-1} \Lambda^T(f) N_0^{-1}(f) \right\} \quad (2.3.52)$$

Таким образом, особенность второго способа заключается в возможности замены обращения матриц размером $M \times M$ на обращение матриц размером $r \times r$. Рассмотрим пример использования выражения (2.3.52) для случая двух помех ($r=2$). Найдем вначале матрицу, подлежащую обращению, и выполним эту операцию. Последовательно получаем, что

$$Z^{-1} + \Lambda^T N_0^{-1} \bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} z_1^{-1} & 0 \\ 0 & z_2^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{p_1}^T \\ L_{p_2}^T \end{bmatrix} N_0^{-1} [\bar{L}_{p_1} \bar{L}_{p_2}] =$$

$$= \begin{bmatrix} z_1^{-1} + C_{p_1 p_1} & C_{p_1 p_2} \\ C_{p_2 p_1} & z_2^{-1} + C_{p_2 p_2} \end{bmatrix};$$

$$[Z^{-1} + \Lambda^T N_0^{-1} \bar{\Lambda}]^{-1} = z_1 z_2 \Delta^{-1} \begin{bmatrix} z_2^{-1} + C_{p_2 p_2} & -C_{p_1 p_2} \\ -C_{p_2 p_1} & z_1^{-1} + C_{p_1 p_1} \end{bmatrix}$$

где

$$C_{p_i p_j} = L_{p_i}^T N_0^{-1} \bar{L}_{p_j}, \quad i, j = 1, 2; \quad (2.3.53)$$

$$\Delta = (1 + z_1 C_{p_1 p_1})(1 + z_2 C_{p_2 p_2}) - z_1 z_2 C_{p_1 p_2} C_{p_2 p_1}.$$

В результате из выражения (2.3.52) находим

$$G_2^{-1} = \frac{N_0^{-1}}{g_n} \left\{ E - \Delta^{-1} [z_1 (1 + z_2 C_{p_2 p_2}) \bar{L}_{p_1} L_{p_1}^T N_0^{-1} - \right.$$

$$- z_1 z_2 C_{p_1 p_2} \bar{L}_{p_1} L_{p_2}^T N_0^{-1}] - \Delta^{-1} [z_2 (1 + z_1 C_{p_1 p_1}) \bar{L}_{p_2} L_{p_2}^T N_0^{-1} -$$

$$\left. - z_1 z_2 C_{p_2 p_1} \bar{L}_{p_2} L_{p_1}^T N_0^{-1}] \right\}. \quad (2.3.54)$$

КЧХ многомерного фильтра определяется в этом случае формулой (2.3.46) и выражением, входящим в (2.3.54):

$$H(f) = N_0^{-1}(f) [\bar{L}_s(f) - h_{p_1}(f) \bar{L}_{p_1}(f) - h_{p_2}(f) \bar{L}_{p_2}(f)], \quad (2.3.55)$$

где использованы следующие обозначения:

$$h_{p_1}(f) = \Delta^{-1}(f) \left\{ z_1(f) [1 + z_2(f) C_{p_2 p_2}(f)] \times \right.$$

$$\left. \times C_{p_1 s}(f) - z_1(f) z_2(f) C_{p_1 p_2}(f) C_{p_2 s}(f) \right\};$$

$$h_{p_2}(f) = \Delta^{-1}(f) \left\{ z_2(f) [1 + z_1(f) C_{p_1 p_1}(f)] \times \right.$$

$$\left. \times C_{p_2 s}(f) - z_1(f) z_2(f) C_{p_2 p_1}(f) C_{p_1 s}(f) \right\};$$

$$C_{p_i s}(f) = L_{p_i}^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_s(f), \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что в случае прихода обеих помех с одного направления [$a_{p_2} = a_{p_1}$, и $L_{p_1}(f) = L_{p_2}(f)$] выражение (2.3.55) становится тождественным (2.3.5), если учесть, что $g_{p_1}(f) + g_{p_2}(f) = g_p(f)$.

Функциональная схема модифицированного варианта оптимальной СПВО, отвечающая КЧХ многомерного фильтра (2.3.55), изображена на рис. 2.13, где часть схемы, относящаяся к временной обработке, опущена (ср. со схемой на рис. 2.10). Наличие двух локальных помех приводит к необходимости компенсации антенны в трех различных направлениях — на сигнал и каждую из локальных помех, а также согласования процессов на выходах компенсаторов помех с помощью фильтров с КЧХ $h_{p_1}(f)$ и $h_{p_2}(f)$. Из схем, изображенных на рис. 2.10 и 2.13, видно, что модифицированная структура оптимальной СПВО изменяется при изменении

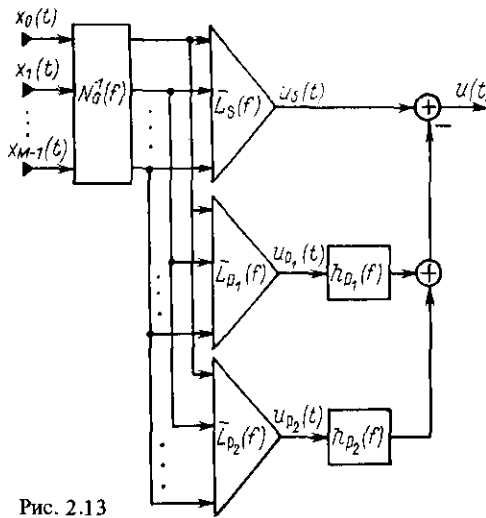


Рис. 2.13

числа помех. Основная же структура оптимальной СПВО (см. рис. 2.1) с многомерным фильтром остается неизменной при любом числе помех, лишь изменяются КЧХ составляющих фильтра $H_m(f)$.

Индикаторное отношение с/ш оптимальной СПВО в ситуации с двумя локальными помехами определяется выражением, аналогичным (2.3.8), где нужно учесть КЧХ [см. (2.3.55)] многомерного фильтра:

$$Q = \left(T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left\{ L_s^T(f) N_0^{-1}(f) [\bar{L}_s(f) - h_{p_1}(f) \bar{L}_{p_1}(f) - h_{p_2}(f) \bar{L}_{p_2}(f)] \right\}^2 df \right)^{1/2} = \left(T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [C_{ss}(f) - h_{p_1}(f) C_{sp_1}(f) - h_{p_2}(f) C_{sp_2}(f)]^2 df \right)^{1/2}, \quad (2.3.56)$$

где $C_{ss}(f) = L_s^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_s(f)$; $C_{sp_i}(f) = L_s^T(f) N_0^{-1}(f) \bar{L}_{p_i}(f)$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим несколько частных случаев. Пусть мощности обеих помех существенно больше мощности изотропного шума, тогда из выражений (2.3.53) и (2.3.55) находим, что

$$h_{p_1}(f) = \frac{C_{p_1s}(f) C_{p_2p_2}(f) - C_{p_2s}(f) C_{p_1p_2}(f)}{C_{p_1p_1}(f) C_{p_2p_2}(f) - C_{p_1p_2}(f) C_{p_2p_1}(f)},$$

$$h_{p_2}(f) = \frac{C_{p_2s}(f) C_{p_1p_1}(f) - C_{p_1s}(f) C_{p_2p_1}(f)}{C_{p_1p_1}(f) C_{p_2p_2}(f) - C_{p_1p_2}(f) C_{p_2p_1}(f)}, \quad (2.3.57)$$

т. е., так же как и в случае (2.3.10), согласующие фильтры имеют КЧХ, не зависящие от спектров помех. Следовательно, величина выходного отношения с/ш остается постоянной при неограниченном увеличении мощности помех и определяется величиной Q (2.3.56), где $h_{p_1}(f)$ и $h_{p_2}(f)$ (2.3.57) зависят лишь от углов прихода помех [см. (2.3.11)].

Если шум на элементах АР не коррелирован ($N_0(f) = E$), то

$$C_{ss}(f) = C_{p_1p_1}(f) = C_{p_2p_2}(f) = M; \quad C_{p_1p_2}(f) = L_{p_1}^T(f) \bar{L}_{p_2}(f) = MD_{p_1p_2}(f); \quad C_{sp_i}(f) = L_s^T(f) \bar{L}_{p_i}(f) = MD_{sp_i}(f).$$

В результате, используя обозначения как в (2.3.16), из формулы (2.3.56) находим

$$Q = M \left(\int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \times \left[1 - \frac{Mz_1(f)R_{p_1s}^2(f)[1+Mz_2(f)] + Mz_2(f)R_{p_2s}^2(f)[1+Mz_1(f)]}{[1+Mz_1(f)][1+Mz_2(f)] - M^2z_1(f)z_2(f)R_{p_1p_2}^2(f)} + \frac{2M^2z_1(f)z_2(f)R_{sp_1}(f)R_{p_2s}(f)R_{p_1p_2}(f)}{[1+Mz_1(f)][1+Mz_2(f)] - M^2z_1(f)z_2(f)R_{p_1p_2}^2(f)} \right]^2 df \right)^{1/2} \quad (2.3.58)$$

Если обе помехи по мощности существенно превосходят шум, то при $z_1, z_2 \rightarrow \infty$ из последнего выражения получаем

$$Q = M \left(\int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \times \left[1 - \frac{R_{p_1s}^2(f) + R_{p_2s}^2(f) - 2R_{sp_1}(f)R_{p_2s}(f)R_{p_1p_2}(f)}{1 - R_{p_1p_2}^2(f)} \right]^2 df \right)^{1/2} \quad (2.3.59)$$

Когда обе помехи приходят с одного направления, т. е. $R_{p_1p_2}(f) = 1$, а $R_{p_2s}(f) = R_{p_1s}(f)$, выражение (2.3.58) переходит в (2.3.15), а (2.3.59) в (2.3.17) (в последнем случае нужно предварительно раскрыть неопределенность).

2.4. Субоптимальные системы пространственно-временной обработки, основанные на упрощении структуры оптимальной системы

Основной функциональный блок оптимальной СПВО – многомерный фильтр – должен обрабатывать информацию с выходов каждого преобразователя АР. Один из возможных способов упрощения системы заключается в объединении элементов решетки в группы (подрешетки) и обработке информации с выходов УФХН таких групп многомерным фильтром размерности, пониженной во столько раз, сколько элементов содержит каждая группа [8, 86]. Другой способ заключается в обработке информации с выходов полностью сформированных пространственных каналов АР – выходов УФХН [64, 77, 80, 92].

Представление входной информации в субоптимальной СПВО с группированием элементов АР. Для упрощения рассмотрим линейную АР с M элементами, объединенными в K групп по m элементов в каждой группе ($M = km$). Положим, что АР компенсирована в направлении ожидаемого сигнала, определяемого углом α_s . Информация с выходов сумматоров

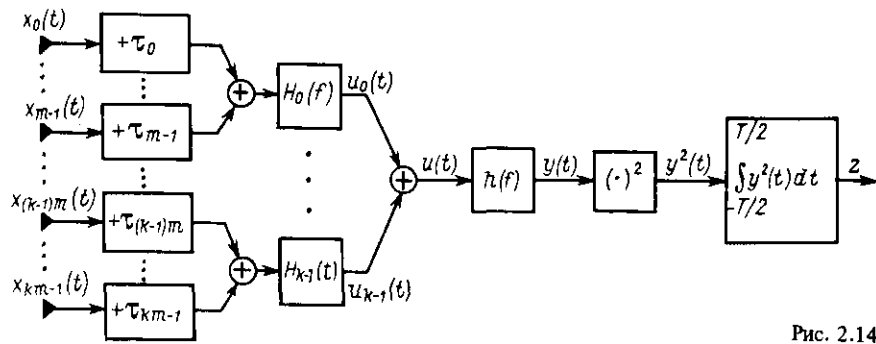


Рис. 2.14

групп поступает на k -мерный фильтр и далее, после суммирования обработанной информации, выполняются, так же как в оптимальной СПВО, фильтрация, квадрирование и интегрирование. Структурная схема такой системы показана на рис. 2.14.

Опишем математически операцию группирования и преобразования информации с выходов элементов АР на выходы сумматоров групп. Воспользуемся для этого матрицей $\bar{V}_s(f)$ [см. (2.1.15)], определяющей КЧХ компенсатора АР для направления ожидаемого сигнала. Кроме того, для учета эффекта суммирования уже скомпенсированных сигналов групп введем матрицу F размером $k \times km$, в которой каждая из k строк содержит m единиц и $m(k-1)$ нулей

$$F = \begin{bmatrix} 11 \dots 1 & 00 \dots 0 & \dots & 00 \dots 0 \\ 00 \dots 0 & 11 \dots 1 & \dots & 00 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 00 \dots 0 & 00 \dots 0 & \dots & 11 \dots 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4.1)$$

Тогда матрица $\Gamma(f) = F\bar{V}_s(f)$ размером $k \times km$ будет описывать результат преобразования информации с выходов элементов АР (числом $M=mk$) на выходы сумматоров компенсаторов групп (числом k). Так как для линейной АР $\tau_i = \delta_s i$, где единичная задержка $\delta_s = (d/c) \sin \alpha_s$, то из (2.1.15) и (2.4.1) находим, что

$$\Gamma(\omega) = \begin{bmatrix} 1 \dots e^{j\omega(m-1)\delta_s} | 00 & \dots & 0 | \dots | 00 & \dots & 0 \\ 00 & \dots & 0 | e^{j\omega m \delta_s} \dots e^{j\omega(2m-1)\delta_s} | \dots | 00 & \dots & 0 \\ 00 & \dots & 0 | 00 & \dots & 0 | \dots | e^{j\omega m(k-1)\delta_s} \dots e^{j\omega(km-1)\delta_s} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4.2)$$

С помощью матрицы $\Gamma(f)$ эффект введения групп приводит к преобразованию векторов $L_s(f)$ (2.1.3) и $L_p(f)$ (2.3.1) с $M=mk$ составляющими в векторы, которые обозначим через $l_s(f)$ и $l_p(f)$, с k составляющими каждый. Векторы $l_s(f)$ и $l_p(f)$ определяют Фурье-изображения

операторов временных задержек фазовых фронтов сигнала и локальной помехи на выходах сумматоров УФХН групп линейной АР. Для этих векторов находим

$$l_s(f) = \Gamma(f)L_s(f) = F\bar{V}_s(f)V_s(f)I_M = mI_k, \quad (2.4.3)$$

где I_M и I_k — векторы, образованные соответственно M и k единицами;

$$l_p(f) = \Gamma(f)L_p(f) = m d_{ps}(f)B_{ps}(f). \quad (2.4.4)$$

Здесь

$$d_{ps}(f) = r_{ps}(f) \exp[-j\pi f(m-1)(\delta_p - \delta_s)];$$

$$r_{ps}(f) = \frac{\sin \pi m f (\delta_p - \delta_s)}{m \sin \pi f (\delta_p - \delta_s)} \quad (2.4.5)$$

ХН группы линейной АР, состоящей из m элементов, компенсированной в направлении a_s для угла a_p , а вектор с k составляющими

$$B_{ps}(f) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp[-j \cdot 2\pi f m (\delta_p - \delta_s)] \\ \dots \\ \exp[-j \cdot 2\pi f m (\delta_p - \delta_s)(k-1)] \end{bmatrix}. \quad (2.4.6)$$

Таким образом, линейная АР, компенсированная в направлении a_s , с M ненаправленными элементами, объединенными в k групп по m элементов в каждой, рассматривается фактически как АР с k направленными элементами, имеющими координаты $0, md, 2md, \dots, (mk-1)d$ и ХН группы $d_{ps}(f)$. Так как $k^{-1}B_{ps}(f)I_k^T$ есть ХН такой „прореженной” в m раз АР с ненаправленными элементами, то

$$d_{ps}(f) \frac{1}{k} B_{ps}(f)I_k^T = D_{ps}(f), \quad (2.4.7)$$

где $D_{ps}(f)$ — ХН АР, определяемая по формуле (2.3.14).

Матрица ВСПМ k -мерного процесса $\Gamma(f)X(f)$ на выходах компенсаторов групп

$$M\{[\Gamma(f)X(f)][\Gamma(f)X(f)]^T\} = \bar{\Gamma}(f)M\{\bar{X}(f)X^T(f)\} \Gamma^T(f). \quad (2.4.8)$$

Отсюда, воспользовавшись выражениями для матриц ВСПМ (2.1.3) и (2.3.1), а также формулами (2.4.3) и (2.4.4), находим выражения для соответствующих матриц ВСПМ сигнала, локальной помехи и шума на выходах сумматоров компенсаторов групп:

$$G_s(f) = \bar{\Gamma}(f)g_s(f)\bar{L}_s(f)L_s^T(f)\Gamma^T(f) = g_s(f)\bar{I}_s(f)I_s^T(f); \quad (2.4.9)$$

$$G_p(f) = \bar{\Gamma}(f)g_p(f)\bar{L}_p(f)L_p^T(f)\Gamma^T(f) = g_p(f)\bar{l}_p(f)l_p^T(f); \quad (2.4.10)$$

$$G_n(f) = g_n(f)\bar{\Gamma}(f)N_0(f)\Gamma^T(f). \quad (2.4.11)$$

Полученные выше выражения позволяют синтезировать субоптимальную систему с группированием, рассматривая ее формально как оптимальную и используя для этого характеристики информации [см. (2.4.3) – (2.4.11)] на выходах сумматоров k групп.

Субоптимальная СПВО с группированием, решающая задачу обнаружения сигнала в поле изотропного шума и локальных помех. КЧХ многомерного фильтра такой СПВО следует из формул (2.3.5) и (2.3.6), если использовать выражения (2.4.9) – (2.4.11), определяющие матрицы ВСПМ реализаций полей сигнала, помехи и шума на выходах сумматоров групп

$$H(f) = \left[\bar{\Gamma}(f)N_0(f)\Gamma^T(f) + \frac{g_p(f)}{g_n(f)}\bar{l}_p(f)l_p^T(f) \right]^{-1}\bar{l}_s(f) =$$

$$= [\bar{\Gamma}(f)N_0(f)\Gamma^T(f)]^{-1}[\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_s(f) - h_p(f)\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_p(f)], \quad (2.4.12)$$

где

$$h_p(f) =$$

$$= \frac{g_p(f)L_p^T(f)\Gamma^T(f)[\bar{\Gamma}(f)N_0(f)\Gamma^T(f)]^{-1}\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_s(f)}{g_n(f) + g_p(f)L_p^T(f)\Gamma^T(f)[\bar{\Gamma}(f)N_0(f)\Gamma^T(f)]^{-1}\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_p(f)}. \quad (2.4.13)$$

Из (2.3.8) аналогично находим индикаторное отношение с/ш

$$Q_{ГР} = \left(T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left\{ L_s^T(f)\Gamma^T(f)[\bar{\Gamma}(f)N_0(f)\Gamma^T(f)]^{-1} \times \right. \right.$$

$$\left. \times [\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_s(f) - h_p(f)\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_p(f)] \right\}^2 df \right)^{1/2}. \quad (2.4.14)$$

Проанализируем полученное выражение. При отсутствии группирования ($m=1$ и $k=M$, т. е. $F=E$) матрица $\Gamma(f) = \bar{V}_s(f)$, а поэтому КЧХ (2.4.12) совпадает с таковой для оптимальной системы, используемой в алгоритме обработки (2.3.9). Соответственно выражение (2.4.14) переходит в (2.3.8).

В другом крайнем случае, когда все элементы АР объединяются в одну группу ($m=M$ и $k=1$, т. е. $F=I_M$), матрица $\Gamma(f) = I_M^T \bar{V}_s(f) = \bar{L}_s^T(f)$ есть вектор-строка. Величины, входящие в формулы (2.4.12) – (2.4.14), принимают вид $\bar{\Gamma}L_s = L_s^T \Gamma^T = M$; $L_p^T \Gamma^T = M D_{ps}$ и $\bar{\Gamma}L_p = M \bar{D}_{ps}$, где величина D_{ps} определяется формулой (2.3.14). Убедимся, что в этом случае субоптимальная СПВО тождественна традиционной системе. Подставим определенные выше величины в формулу (2.4.12) для $H(f)$ и умножим полученное выражение на $h(f) = \sqrt{g_s(f)/g_n(f)}$. Это произведение определяет КЧХ послесумматорного фильтра при отсутствии группирования. В результате находим

$$h(f)H(f) = \frac{M\sqrt{g_s(f)}}{g_n(f)L_s^T(f)N_0(f)\bar{L}_s(f) + g_p(f)M^2R_{ps}^2(f)} \quad (2.4.15)$$

Отсюда видно, что эта КЧХ совпадает с КЧХ из формулы (2.2.33), где для исследуемого случая аддитивного поля шума и локальной помехи в знаменателе (2.2.33) нужно добавить слагаемое $g_p(f)M^2R_{ps}^2(f)$, определяющее спектр помехи на выходе УФХН. С учетом такой же добавки выражение (2.4.14) принимает вид

$$Q_{ГР} = M^2 \left\{ T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left[L_s^T(f)N_0(f)\bar{L}_s(f) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{g_p(f)}{g_n(f)}M^2R_{ps}^2(f) \right]^{-2} df \right\}^{1/2} \quad (2.4.16)$$

и совпадает с формулой (2.2.34).

Рассмотрим теперь свойства системы с группированием при действии сильной локальной помехи, когда $g_p(f) \gg g_n(f)$. В этом случае выражение (2.4.13) для КЧХ $h_p(f)$ аналогично (2.3.10), где в последней формуле заменено L_p^T на $L_p^T \Gamma^T$, L_s на $\bar{\Gamma}L_s$ и N_0^{-1} на $(\bar{\Gamma}N_0\Gamma^T)^{-1}$. Если осуществить такую же замену в выражении (2.3.11) для Q , то оно примет вид, аналогичный (2.4.14). Таким образом, в субоптимальной СПВО с группированием элементов АР при неограниченном увеличении мощности локальной помехи [$g_p(f) \rightarrow \infty$] помехоустойчивость стремится к постоянному значению. Если все элементы АР объединены в одну группу, система превращается в традиционную одноканальную и при $g_p(f) \rightarrow \infty$ величина $Q_{ГР} \rightarrow 0$ [см. (2.2.34) с учетом указанной выше поправки].

Анализ помехоустойчивости субоптимальной СПВО с группированием.

Оценим потерю помехоустойчивости субоптимальной СПВО по отношению к оптимальной для случая аддитивного поля изотропного шума и локальной помехи, приняв для упрощения выкладок, что шум по элементам АР не коррелирован, т. е. $N_0(f) = E$. Тогда в выражениях (2.4.13) и (2.4.14) нужно положить $\bar{\Gamma}L_s = mI_k$, $L_s^T \Gamma^T = mI_k^T$, $(\bar{\Gamma}\Gamma^T)^{-1} = m^{-1}E_k$, где I_k – вектор, состоящий из k единиц; E_k – матрица размером $k \times k$; использовать формулы (2.4.5) и (2.4.7), а также учесть, что $L_s^T \Gamma^T (\bar{\Gamma}\Gamma^T)^{-1} \bar{\Gamma}L_s = M$ и $L_s^T \Gamma^T (\bar{\Gamma}\Gamma^T)^{-1} \bar{\Gamma}L_p = M D_{ps}$. Используя все эти выражения, из формулы (2.4.14) находим

$$Q_{ГР} = M \left\{ T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left[1 - \frac{g_p(f)M R_{ps}^2(f)}{g_n(f) + g_p(f)M r_{ps}^2(f)} \right]^2 df \right\}^{1/2}, \quad (2.4.17)$$

где $r_{ps}(f)$ – ХН группы [см. (2.4.5)]; $R_{ps}(f)$ – ХН всей АР [см. (2.3.16)].

Проанализируем выражение (2.4.17) для некоторых частных случаев: при отсутствии группирования, когда $m=1$, $r_{ps}(f) = 1$ [см. (2.4.5)] и выражение (2.4.17) совпадает с формулой (2.3.15) для оптимальной СПВО;

Таблица 2.1 Зависимость потерь помехоустойчивости СПВО с группированием по отношению к оптимальной, дБ

m	α _p , град.						
	1	2	3	4	5	6	7
	q _{pn} = 10						
2	0,045	0,042	0,035	0,024	0,013	0,004	0,001
4	0,231	0,221	0,181	0,131	0,071	0,033	0,006
8	1,062	1,031	0,862	0,632	0,363	0,134	0,004
16	10,12	14,72	16,12	15,52	13,13	8,11	0,44
	q _{pn} = 1						
2	0,023	0,032	0,029	0,021	0,012	0,004	0,000
4	0,123	0,173	0,151	0,110	0,063	0,021	0,000
8	0,524	0,764	0,712	0,533	0,324	0,113	0,003
16	2,74	5,65	6,75	6,28	4,47	1,80	0,043
	q _{pn} = 0,1						
2	0,003	0,007	0,009	0,008	0,005	0,002	0,000
4	0,014	0,036	0,046	0,039	0,024	0,008	0,000
8	0,058	0,156	0,200	0,175	0,107	0,037	0,001
16	0,243	0,699	0,949	0,838	0,484	0,143	0,002

при объединении всех элементов АР в одну группу, когда $m=M$ $r_{ps}(f) = R_{ps}(f)$ [см. (2.4.5) и (2.3.16)], а поэтому выражение (2.4.17) переходит в формулу (2.2.34) для традиционной системы (с учетом локальной помехи), что совпадает также с выражением (2.4.16) при $N_0(f) = E$.

в случае прихода локальной помехи и сигнала с одного направления ($\alpha_p = \alpha_s$) $r_{ps}(f) = R_{ps}(f) = 1$, тогда выражение (2.4.17) совпадает с (2.3.18) (помехоустойчивость оптимальной и субоптимальной СПВО одна и та же что физически понятно);

если помеха сильная, так что $(g_p/g_n)^2 M r_{ps}^2 \gg 1$, то из выражения (2.4.17) находим

$$Q_{гр} \approx M \left\{ T \int_{f_n}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_p^2(f)} \left[1 - \frac{R_{ps}^2(f)}{r_{ps}^2(f)} \right] df \right\}^{1/2}, \quad (2.4.18)$$

и при $m=1$ формула (2.4.18) совпадает с (2.3.17), а в случае $m=M$ $Q_{гр} = 0$; если углы α_p и α_s различаются значительно, так что $R_{sp}^2(f) \approx 0$ (боковой уровень ХН), то помехоустойчивость системы с группированием близка к помехоустойчивости для оптимальной СПВО и практически близка к величине Q_0 [см. (2.3.21)].

Приведенные результаты следуют также из сравнения помехоустойчивости системы с группированием с оптимальной СПВО для узкополосных входных процессов, т. е. на фиксированной частоте f , когда величины Q [см. (2.3.15)] и $Q_{гр}(f)$ [см. (2.4.17)] определяются их подынтегральными функциями. В таком случае находим

$$\eta_{гр} = \frac{Q_{гр}(f)}{Q(f)} = \frac{g_n(f) + M g_p(f)}{g_n(f) + M g_p(f) r_{ps}^2(f)} \frac{g_n(f) + M g_p(f) [r_{ps}^2(f) - R_{ps}^2(f)]}{g_n(f) + M g_p(f) [1 - R_{ps}^2(f)]} \approx \frac{1}{r_{ps}^2(f)} \frac{r_{ps}^2(f) - R_{ps}^2(f)}{1 - R_{ps}^2(f)} = 1 - \frac{R_{ps}^2(f) [1 - r_{ps}^2(f)]}{r_{ps}^2(f) [1 - R_{ps}^2(f)]}, \quad (2.4.19)$$

где приближенная часть этого равенства записана для сильной помехи, когда $g_p(f) \gg g_n(f)$. Приведем для примера результаты расчета величин потерь помехоустойчивости СПВО с группированием по отношению к помехоустойчивости оптимальной (2.4.19) (табл. 2.1), где $(f/c)d = 0,5$; угол $\alpha_s = 0$; $R_{ps}(f)$ и $r_{ps}(f)$ определяются (2.3.16) и (2.4.5) соответственно; $M = 16$; $g_p/g_n = q_{pn} = 10$; 1 и 0,1; $m = 2, 4, 8, 16$; $\alpha_p = 1 \div 7^\circ$. Знак „минус“ у величин потерь $\eta_{гр}$ опущен. Из таблицы видно, что потери резко возрастают при переходе к одной группе — т. е. к традиционной системе, когда $m = M = 16$.

Определим теперь выражение для углового отклика (УО) субоптимальной СПВО. Аналогично выводу формулы (2.3.25) найдем зависимость мощности выходного эффекта $P_s(\alpha)$ от угла α прихода плоской волны. Используя выражения для КЧХ многомерного фильтра $H(f)$ [см. (2.4.12)] при $N_0(f) = E$, а также для КЧХ скалярного фильтра $h(f)$ [см. (2.1.19)], из формулы (2.3.25) находим

$$P_s(\alpha) = 2 M^2 T \int_{f_n}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left| D_{as}(f) - \frac{g_p(f) M}{g_n(f) + g_p(f) M r_{ps}^2(f)} d_{as}(f) \bar{d}_{ps}(f) \frac{D_{ap}(f)}{d_{ap}(f)} D_{ps}(f) \right|^2 df. \quad (2.4.20)$$

Здесь выражения ХН АР $D_{ps}(f)$ [см. (2.3.14)], $D_{as}(f)$ [см. (2.3.26)], ХН группы $d_{ps}(f)$ и $r_{ps}(f)$ и ХН $d_{as}(f)$ и $d_{ap}(f)$ определяются формулой (2.4.5), где в первом случае нужно заменить δ_p на δ_a , а во втором δ_p на δ_a и δ_s на δ_p . В результате из выражения (2.4.20) получаем расчетную формулу, куда входят только действительные величины;

$$P_s(\alpha) = 2 M^2 T \int_{f_n}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left[R_{as}(f) - \frac{g_p(f) M}{g_n(f) + g_p(f) M r_{ps}^2(f)} r_{as}(f) r_{ps}(f) \frac{R_{ap}(f)}{r_{ap}(f)} R_{ps}(f) \right]^2 df. \quad (2.4.21)$$

Здесь выражения для R_{ap} и R_{ps} определяются формулой (2.3.16) с заданной входящих туда величин в соответствии с использованной тут индексацией, а r_{as} , r_{ps} и r_{ap} определяются формулой (2.4.5).

Для нормировки $P_s(\alpha)$ следует использовать эту же величину при $\alpha = \alpha_s$, где $R_{ss}(f) = r_{ss}(f) = 1$, в результате из формулы (2.4.21) находим

$$P_s(\alpha_s) = 2M^2 T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left[1 - \frac{g_p(f)MR_{ps}^2(f)}{g_n(f) + g_p(f)Mr_{ps}^2(f)} \right]^2 df, \quad (2.4.21)$$

причем из сравнения этого выражения с формулой (2.4.17) видно, что $P_s(\alpha_s) = 2Q_{rp}^2$. Уровень подавления локальной помехи определяется значением величины $P_s(\alpha)$ при $\alpha = \alpha_p$. Так как $r_{pp} = R_{pp} = 1$, то

$$P_s(\alpha_p) = 2M^2 T \int_{f_H}^{f_B} \left[\frac{g_s(f)R_{ps}(f)}{g_n(f) + g_p(f)Mr_{ps}^2(f)} \right]^2 df. \quad (2.4.22)$$

Сравнение этого выражения с аналогичной формулой (2.3.28) показывает, что при группировании уровень подавления локальной помехи уменьшается.

Проанализируем формулу (2.4.21) для крайних случаев группирования. Если $m=1$ и $k=M$ (группирование отсутствует), то $r_{as} = r_{ps} = r_{ap} = 1$ и формула (2.4.21) переходит в (2.3.27). Если $m=M$ и $k=1$ (элементы АП объединяются в одну группу), то $r_{as} = R_{as}$, $r_{ps} = R_{ps}$, $r_{ap} = R_{ap}$ и $r_{ps} = R_{ps}$. Тогда

$$P_s(\alpha) = 2T \int_{f_H}^{f_B} R_{as}^2(f) \left[\frac{M^2 g_s(f)}{Mg_n(f) + M^2 g_p(f)R_{ps}^2(f)} \right]^2 df. \quad (2.4.24)$$

Это выражение определяет ненормированную ХНАР в полосе частот (f_H, f_B) для спектра сигнала, заданного квадратом выражения в квадратных скобках (2.4.24). Выражение для ИП $P_\Sigma(\beta)$ [см. (2.3.30)] может быть получено подобно тому, как это было сделано в разд. 2.3.

Помехоустойчивость субоптимальной СПВО с группированием в случае действия нескольких помех. Матрица ВСПМ аддитивного поля шума и нескольких локальных помех определяется выражением, аналогичным (2.3.45), где нужно заменить матрицу N_0 на $\Gamma N_0 \Gamma^T$, а вектор L_{pi} на ΓL_{pi} . В результате указанной замены из формулы (2.3.55) находим выражение для КЧХ $H(f)$ многомерного фильтра субоптимальной СПВО с группированием элементов АП

$$H(f) = [\bar{\Gamma}(f)N_0(f)\Gamma^T(f)]^{-1} [\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_s(f) - h_{p_1}(f)\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_{p_1}(f) - h_{p_2}(f)\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_{p_2}(f)]. \quad (2.4.25)$$

КЧХ согласующих фильтров $h_{p_1}(f)$ и $h_{p_2}(f)$ описываются теми же зависимостями, что и в формуле (2.3.55), где лишь в соответствии с формулой (2.3.53)

$$C_{p_i p_j}(f) = L_{p_i}^T(f)\Gamma^T(f)[\bar{\Gamma}(f)N_0(f)\Gamma^T(f)]^{-1}\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_{p_j}(f), \quad i, j = 1, 2; \quad (2.4.26)$$

$$C_{p_i s}(f) = L_{p_i}^T(f)\Gamma^T(f)[\bar{\Gamma}(f)N_0(f)\Gamma^T(f)]^{-1}\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_s(f), \quad i = 1, 2. \quad (2.4.27)$$

Функциональная схема субоптимальной СПВО в случае действия двух локальных помех аналогична приведенной выше на рис. 2.13, если векторы \bar{L}_s , \bar{L}_{p_1} и \bar{L}_{p_2} заменить на $\bar{\Gamma}\bar{L}_s$, $\bar{\Gamma}\bar{L}_{p_1}$ и $\bar{\Gamma}\bar{L}_{p_2}$, а матрицу N_0^{-1} на $[\bar{\Gamma}N_0\Gamma^T]^{-1}$. Выходное отношение с/ш субоптимальной СПВО определим исходя из выражения (2.3.56) для этой же величины оптимальной СПВО, но с учетом указанной выше замены:

$$Q_{rp} = \left(T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \{ L_s^T(f)\Gamma^T(f)[\bar{\Gamma}(f)N_0(f)\Gamma^T(f)]^{-1} \times \right. \\ \left. \times [\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_s(f) - h_{p_1}(f)\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_{p_1}(f) - h_{p_2}(f)\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_{p_2}(f)] \}^2 df \right)^{1/2} = \\ = \left\{ T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [C_{ss}(f) - h_{p_1}(f)C_{sp_1}(f) - h_{p_2}(f)C_{sp_2}(f)]^2 df \right\}^{1/2}. \quad (2.4.28)$$

Здесь $h_{p_1}(f)$ и $h_{p_2}(f)$ определяются так же, как и в формуле (2.4.25), а

$$C_{ss}(f) = L_s^T(f)\Gamma^T(f)[\bar{\Gamma}(f)N_0(f)\Gamma^T(f)]^{-1}\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_s(f);$$

$$C_{sp_i}(f) = L_{p_i}^T(f)\Gamma^T(f)[\bar{\Gamma}(f)N_0(f)\Gamma^T(f)]^{-1}\bar{\Gamma}(f)\bar{L}_{p_i}(f), \quad i = 1, 2.$$

Проанализируем полученные выражения для крайних случаев группирования. При отсутствии группирования, когда $m=1$ и $k=M$, матрица $\Gamma = \bar{V}_s$ и поэтому $(V_s N_0 \bar{V}_s)^{-1} = V_s N_0^{-1} \bar{V}_s$, выражение (2.4.25) переходит в (2.3.55), а (2.4.28) в (2.3.56). При объединении элементов АП в одну группу, когда $m=M$ и $k=1$, субоптимальная СПВО должна трансформироваться в систему с оптимизированной КЧХ послесумматорного фильтра, описанного выражением (2.2.33). Действительно, положим в формуле (2.4.25) $\Gamma = F\bar{V}_s = I_M^T \bar{V}_s = \bar{L}_s^T$. В результате преобразований найдем КЧХ послесумматорного скалярного фильтра, равную произведению $H(f)$ (2.4.25) и $h(f) = \sqrt{g_s(f)/g_n(f)}$,

$$H(f)h(f) = \frac{M\sqrt{g_s(f)}}{g_n(f)L_s^T(f)N_0(f)\bar{L}_s(f) + g_{p_1}(f)M^2R_{p_1s}^2(f) + g_{p_2}(f)M^2R_{p_2s}^2(f)}. \quad (2.4.29)$$

Выходное отношение с/ш в рассматриваемом случае

$$Q_{\text{гр}} = M^2 \left\{ T \int_{f_{\text{н}}}^{f_{\text{в}}} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left[L_s^T(f) N_0(f) \bar{L}_s(f) + \frac{g_{p_1}(f)}{g_n(f)} M^2 R_{p_1 s}^2(f) + \frac{g_{p_2}(f)}{g_n(f)} M^2 R_{p_2 s}^2(f) \right]^{-2} df \right\}^{1/2} \quad (2.4.3)$$

[ср. с формулами (2.4.15) и (2.4.16)].

В случае, когда шум на элементах АР не коррелирован, т. е. $N_0(f) = E$, из выражения (2.4.28) находим

$$Q_{\text{гр}} = M \left\{ T \int_{f_{\text{н}}}^{f_{\text{в}}} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left[1 - \frac{A(f)}{B(f)} + \frac{C(f)}{B(f)} \right]^2 df \right\}^{1/2} \quad (2.4.31)$$

где

$$A(f) = M z_1(f) [1 + M z_2(f) r_{sp_2}^2(f)] R_{sp_1}^2(f) +$$

$$+ M z_2(f) [1 + M z_1(f) r_{sp_1}^2(f)] R_{sp_2}^2(f);$$

$$B(f) = [1 + z_1(f) M r_{sp_1}^2(f)] [1 + z_2(f) M r_{sp_2}^2(f)] -$$

$$- z_1(f) z_2(f) r_{sp_1}^2(f) r_{sp_2}^2(f) M^2 \frac{R_{p_1 p_2}^2(f)}{r_{p_1 p_2}^2(f)};$$

$$C(f) = 2 M^2 z_1(f) z_2(f) r_{p_1 s}(f) r_{sp_2}(f) \frac{R_{p_1 p_2}(f)}{r_{p_1 p_2}(f)} R_{sp_1}(f) R_{p_2 s}(f),$$

а выражения ХН АР R_{sp_1} , R_{sp_2} и $R_{p_1 p_2}$ определяются формулой (2.3.16) с заменой величин в соответствии с использованной здесь индексацией. ХН группы r_{sp_1} , r_{sp_2} и $r_{p_1 p_2}$ аналогичным образом определяются формулой (2.4.5).

Проанализируем выражение (2.4.31) для крайних случаев группирования. При отсутствии группирования ($m=1, k=M$) $r_{sp_1} = r_{sp_2} = r_{p_1 p_2} = 1$ и выражение (2.4.31) совпадает с отношением с/ш [см. (2.3.58)] оптимальной СПВО; при объединении всех элементов в одну группу ($m=M, k=1$) $r_{sp_1} = R_{sp_1}$, $r_{sp_2} = R_{sp_2}$ и $r_{p_1 p_2} = R_{p_1 p_2}$ и выражение (2.4.31) переходит в отношение с/ш [см. (2.4.16)] традиционной СПВО для случая поля шума $N_0(f) = E$, когда $L_s^T N_0 \bar{L}_s = L_s^T \bar{L}_s = M$.

В случае сильных локальных помех, когда $z_1(f)$ и $z_2(f) \rightarrow \infty$, из выражения (2.4.31) находим, что

$$Q_{\text{гр}} = M \left(T \int_{f_{\text{н}}}^{f_{\text{в}}} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \times \left[r_{sp_2}^2(f) R_{sp_1}^2(f) + r_{sp_1}^2(f) R_{sp_2}^2(f) - \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[1 - \frac{2 r_{p_1 s}(f) r_{sp_2}(f) \frac{R_{p_1 p_2}(f)}{r_{p_1 p_2}(f)} R_{sp_1}(f) R_{p_2 s}(f)}{r_{sp_1}^2(f) r_{sp_2}^2(f) [1 - R_{p_1 p_2}^2(f) / r_{p_1 p_2}^2(f)]} \right]^2 df \right] \right)^{1/2} \quad (2.4.32)$$

При отсутствии группирования, когда $r_{sp_1}(f) = r_{sp_2}(f) = r_{p_1 p_2}(f) = 1$, это выражение совпадает с формулой (2.3.59) для выходного отношения с/ш оптимальной СПВО.

Субоптимальные системы пространственно-временной обработки информации с выходов сформированных пространственных каналов. Системы подобного типа рассмотрены в ряде работ [39, 64, 77, 80, 92]. Их принципиальная особенность заключается в предварительном формировании пространственных каналов (лучей), оси которых ориентированы определенным образом (в частном случае – в направлениях на сигнал и локальные помехи), и дальнейшей обработке информации с их выходов. Ясно, что такие системы уже не являются оптимальными, так же как и рассмотренные выше системы с группированием, а поэтому важно уметь количественно определять их эффективность, в частности помехоустойчивость.

Интересно определить потенциальные возможности таких субоптимальных систем, когда их алгоритм обработки оптимизирован в рамках постулированной структуры. Это удобно сделать на примере системы с линейной АР и двумя компенсаторами с КЧХ $\bar{L}_s(f)$ и $\bar{L}_p(f)$, ориентированными соответственно на сигнал и локальную помеху. Такую систему

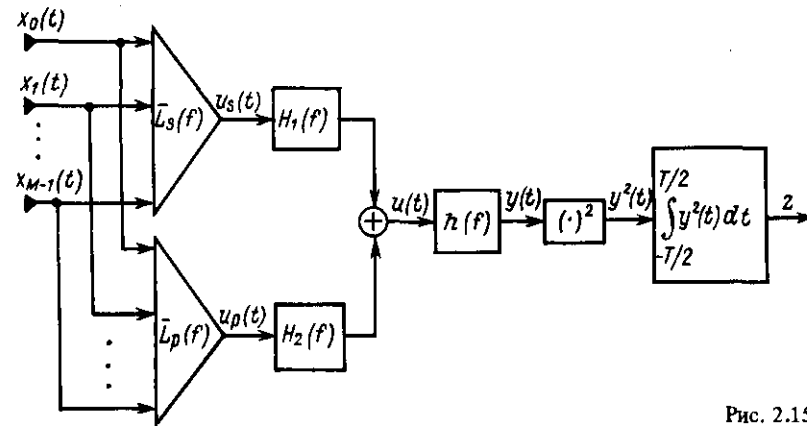


Рис. 2.15

можно рассматривать как АР с двумя элементами, имеющими ХН данной линейной АР, компенсированной в направлениях на сигнал и локальную помеху. Тогда процессы с выходов сумматоров компенсаторов должны обрабатываться так же, как и в оптимальной СПВО с двухэлементной АР (рис. 2.15), т. е. с помощью двумерного фильтра [КЧХ его составляющих $H_1(f)$ и $H_2(f)$] и последующей оптимальной временной обработкой. Для решения задачи синтеза такой системы (определения оптимальной КЧХ двумерного фильтра) необходимо знать матрицы ВСПМ сигнала и шума на выходах сигнального и помехового компенсаторов с КЧХ $\bar{L}_s(f)$ и $\bar{L}_p(f)$ (процессы $u_s(t)$ и $u_p(t)$). Обозначим так же 2×2 -матрицы через $G_s'(f)$, $G_p'(f)$ и $G_n'(f)$. С помощью формул (1.2.10), (2.1.3), (2.3.1), находим

$$G_s'(f) = \begin{bmatrix} L_s^T(f)G_s(f)\bar{L}_s(f) & L_s^T(f)G_s(f)\bar{L}_p(f) \\ L_p^T(f)G_s(f)\bar{L}_s(f) & L_p^T(f)G_s(f)\bar{L}_p(f) \end{bmatrix} =$$

$$= g_s(f) \begin{bmatrix} M^2 & M^2\bar{D}_{ps}(f) \\ M^2D_{ps}(f) & |MD_{ps}(f)|^2 \end{bmatrix};$$

$$G_p'(f) = g_p(f) \begin{bmatrix} |MD_{ps}(f)|^2 & M^2\bar{D}_{ps}(f) \\ M^2D_{ps}(f) & M^2 \end{bmatrix};$$

$$G_n'(f) = g_n(f) \begin{bmatrix} k_{ss}(f) & k_{sp}(f) \\ k_{ps}(f) & k_{pp}(f) \end{bmatrix}.$$

Здесь величина $D_{ps}(f)$ определяется формулой (2.3.14), а элементы матрицы $G_n'(f)$ — формулой (2.2.35) для $k(f)$ с очевидной индексацией: так, $k_{sp}(f) = L_s^T(f)N_0(f)\bar{L}_p(f)$ и т. д. Введенные выше 2×2 -матрицы по структуре аналогичны $M \times M$ -матрицам $G_s(f)$, $G_p(f)$ и $G_n(f)$. Действительно, введем двухкомпонентные векторы $\lambda_s^T(f) = [M, M\bar{D}_{ps}(f)]$ и $\lambda_p^T(f) = [MD_{ps}(f), M]$, а также обозначим через $\nu(f)$ 2×2 -матрицу, определяющую $G_n'(f)$. В результате

$$G_s'(f) = g_s(f)\bar{\lambda}_s(f)\lambda_s^T(f); \quad G_p'(f) = g_p(f)\bar{\lambda}_p(f)\lambda_p^T(f);$$

$$G_n'(f) = g_n(f)\nu(f), \quad (2.4.33)$$

а поэтому двумерная вектор-функция $H(f)$ с составляющими $H_1(f)$ и $H_2(f)$ определяется выражением, аналогичным (2.3.3), (2.3.5) и (2.3.6),

$$H(f) = \left[\nu(f) + \frac{g_p(f)}{g_n(f)} \bar{\lambda}_p(f)\lambda_p^T(f) \right]^{-1} \bar{\lambda}_s(f) =$$

$$= \nu^{-1}(f)[\bar{\lambda}_s(f) - \kappa(f)\bar{\lambda}_p(f)], \quad (2.4.34)$$

$$\kappa(f) = \frac{g_p(f)\lambda_p^T(f)\nu^{-1}(f)\bar{\lambda}_s(f)}{g_n(f) + g_p(f)\lambda_p^T(f)\nu^{-1}(f)\bar{\lambda}_p(f)}. \quad (2.4.35)$$

Выходное отношение с/ш следует из формулы (2.3.8) с учетом введенных выше обозначений:

$$Q = \left(T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left[\lambda_s^T(f)\nu^{-1}(f)[\bar{\lambda}_s(f) - \kappa(f)\bar{\lambda}_p(f)] \right]^2 df \right)^{1/2} =$$

$$= \left(T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left[c_{ss}(f) - \frac{g_n(f)|c_{ps}(f)|^2}{g_n(f) + g_p(f)c_{pp}(f)} \right]^2 df \right)^{1/2} \quad (2.4.36)$$

где после обращения матрицы $\nu(f)$ эрмитовы и билинейная формы $c_{ss}(f)$, $c_{pp}(f)$ и $c_{ps}(f)$ могут быть определены в явном виде:

$$c_{ss} = \lambda_s^T \nu^{-1} \bar{\lambda}_s = \delta^{-1} M^2 [L_p^T N_0 \bar{L}_p +$$

$$+ |D_{ps}|^2 L_s^T N_0 \bar{L}_s - 2 \operatorname{Re} \{ D_{ps} L_s^T N_0 \bar{L}_p \}];$$

$$c_{pp} = \lambda_p^T \nu^{-1} \bar{\lambda}_p = \delta^{-1} M^2 [L_s^T N_0 \bar{L}_s +$$

$$+ |D_{ps}|^2 L_p^T N_0 \bar{L}_p - 2 \operatorname{Re} \{ D_{ps} L_s^T N_0 \bar{L}_p \}];$$

$$c_{ps} = \lambda_p^T \nu^{-1} \bar{\lambda}_s = \delta^{-1} M^2 [D_{ps} (L_p^T N_0 \bar{L}_p + L_s^T N_0 \bar{L}_s) -$$

$$- L_p^T N_0 \bar{L}_s - D_{ps}^* L_s^T N_0 \bar{L}_p];$$

$$\delta = L_p^T N_0 \bar{L}_p L_s^T N_0 \bar{L}_s - |L_p^T N_0 \bar{L}_s|^2.$$

Рассматриваемая субоптимальная СПВО обладает свойством сохранять постоянным выходное отношение с/ш при неограниченном увеличении интенсивности локальной помехи. Величина этого отношения следует из формулы (2.4.36) при $g_p(f) \rightarrow \infty$ и равна

$$Q = \left(T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_p^2(f)} c_{ss}^2(f) \left[1 - \frac{|c_{ps}(f)|^2}{c_{ss}(f)c_{pp}(f)} \right]^2 df \right)^{1/2}.$$

Интересно проанализировать полученные результаты в предположении, что шум не коррелирован по элементам АР, т. е. когда $N_0(f) = E$. В таком случае эрмитовы формы $c_{ss} = c_{pp} = M$; $c_{ps} = MD_{ps}$, а выражение (2.4.36) для Q переходит в формулу (2.3.15) для оптимальной СПВО. Чтобы понять физическую суть трансформации субоптимальной СПВО в оптимальную, определим КЧХ $H(f)$ [см. (2.4.34)] двумерного фильтра субоптимальной СПВО при $N_0(f) = E$. В результате вычислений находим, что КЧХ его составляющих

$$H_1(f) = 1; \quad H_2(f) = -\frac{Mg_p(f)D_{ps}(f)}{g_n(f) + Mg_p(f)} = -h_p(f), \quad (2.4.37)$$

т. е. КЧХ $H_2(f)$ равна по величине и обратна по знаку КЧХ $h_p(f)$ [см. (2.4.13)]. Это означает, что при $N_0(f) = E$ структура субоптимальной СПВО [см. рис. 2.15] совпадает со структурой оптимальной СПВО (см. рис. 2.10) для модифицированного варианта ее алгоритма (2.3.5) при условии, что $N_0(f) = E$.

Индикаторное отношение с/ш (2.4.36) было определено выше для оптимизированной КЧХ двумерного фильтра [см. (2.4.34)] субоптимальной СПВО. В общем случае произвольной КЧХ с составляющими $H_1(f)$ и $H_2(f)$ индикаторное отношение с/ш выражается аналогично (2.2.14):

$$Q = \frac{\sqrt{T} \int_{f_H}^{f_B} \bar{H}^T(f) G'_s(f) H(f) df}{\left(\int_{f_H}^{f_B} \left\{ \bar{H}^T(f) [G'_n(f) + G'_p(f)] H(f) \right\}^2 df \right)^{1/2}} = \frac{\sqrt{T} \int_{f_H}^{f_B} A_s(f) df}{\left(\int_{f_H}^{f_B} A_{np}^2(f) df \right)^{1/2}}, \quad (2.4.38)$$

где исходя из формул, определяющих 2×2 -матрицы $G'_s(f)$, $G'_p(f)$ и $G'_n(f)$,

$$\begin{aligned} A_s(f) &= g_s(f) \{ |H_1(f)|^2 + |H_2(f)|^2 R_{ps}^2(f) + \\ &+ 2 \operatorname{Re}[H_1(f) \bar{H}_2(f) D_{ps}(f)] \}; \\ A_{np}(f) &= |H_1(f)|^2 [g'_n(f) L_s^T(f) N_0(f) \bar{L}_s(f) + g_p(f) R_{sp}^2(f)] + \\ &+ |H_2(f)|^2 [g'_n(f) L_p^T(f) N_0(f) \bar{L}_p(f) + g_p(f)] + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \{ H_1(f) \bar{H}_2(f) [g'_n(f) L_p^T(f) N_0(f) \bar{L}_s(f) + g_p(f) D_{ps}(f)] \}. \end{aligned}$$

Здесь выражения для ХН $D_{sp}(f)$ и $R_{sp}(f)$ определяются формулами (2.3.14) и (2.3.16), $g'_n = g_n/M^2$.

В работе [80] рассмотрена система, структурная схема которой показана на рис. 2.16. С помощью первого комплекта временных задержек („оценочного луча“) осуществляется компенсация АР в направлении на локальную помеху, далее сумма задержанных напряжений делится на число элементов решетки M и полученная величина вычитается из процессов на выходе каждого элемента АР. „Очищенные“ таким образом от помехи разностные напряжения задерживаются с помощью второго комплекта временных задержек (так что величина суммарной задержки в цепи каждого элемента АР одна и та же) и далее используются для формирования пространственного канала („сигнального луча“), ориентированного

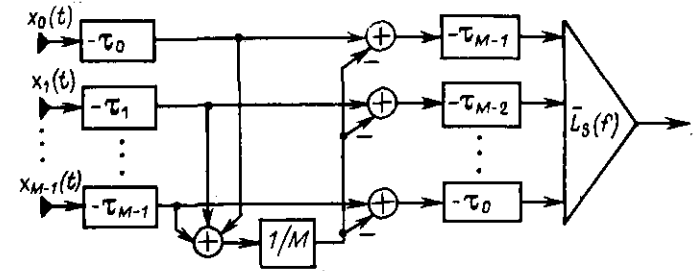


Рис. 2.16

в направлении прихода сигнала. Схема системы, изображенная на рис. 2.16, фактически идентична схеме, представленной на рис. 2.15, для случая некоррелированного шума, когда $N_0(f) = E$ и помеха сильная. Особенность рассматриваемой системы [80] заключается в том, что входные процессы „очищаются“ от локальной помехи в элементах АР, а далее происходит формирование пространственных каналов для различных направлений (в системе на рис. 2.15 операция „очистения“ от локальной помехи осуществляется на выходе каждого сформированного канала). Помехоустойчивость системы [80] может быть определена по формуле (2.4.38), где $H_1(f) = 1$, а $H_2(f) = -D_{ps}(f)$. Описанная система была реализована [78] и испытана [79] в натуральных условиях. Ее АР образована 31 элементом, в системе реализуется 32 пространственных канала, ширина полосы звуковых частот — две октавы. Выигрыш помехоустойчивости такой системы по отношению к традиционной составил 5 дБ.

В работах [64, 77] рассмотрена СПВО, структурная схема которой отвечает системе, изображенной на рис. 2.15, где КЧХ $H_1(f) = 1$, а КЧХ $H_2(f)$ определяется путем измерения взаимной корреляционной функции процессов $u_s(t)$ и $u_p(t)$ на выходах компенсаторов сигнала и помехи для каждой из частотных составляющих этих процессов. Обозначим через $U_s(f)$ и $U_p(f)$ Фурье-изображения на частоте f реализаций временных процессов $u_s(t)$ и $u_p(t)$ на интервале $t \in (0, T)$; тогда $U(f) = U_s(f) + H_2(f) U_p(f)$ есть изображение процесса $u(t)$ на выходе сумматора (см. рис. 2.15). Определим КЧХ $H_2(f)$, исходя из условия равенства нулю нормированного корреляционного момента изображений $U(f)$ и $U_p(f)$. В результате находим

$$H_2(f) = -\frac{M \{ \bar{U}_p(f) U_s(f) \}}{M \{ |U_p(f)|^2 \}}. \quad (2.4.39)$$

Числитель этого отношения определяется суммой элементов матриц $G'_s(f)$, $G'_p(f)$ и $G'_n(f)$, расположенных в их нижнем левом углу, а знаменатель — суммой элементов в нижнем правом углу, поэтому

$$H_2(f) = -\frac{g_s(f) D_{ps}(f) + g_p(f) D_{ps}(f) + g_n(f) L_p^T(f) N_0(f) \bar{L}_s(f)}{g_s(f) R_{sp}^2(f) + g_p(f) + g_n(f) L_p^T(f) N_0(f) \bar{L}_p(f)}. \quad (2.4.40)$$

Такой способ определения КЧХ $H_2(f)$ приводит к режекции сильной помехи. Действительно, если на выходе компенсатора помехи его составляющая, обусловленная самой помехой, есть $U_p^{(p)}(f)$, то на выходе элемента АР — это $(1/M)U_p^{(p)}(f)$. Тогда на выходе компенсатора сигнала составляющая, обусловленная помехой, $U_s^{(p)}(f) = \bar{L}_s(f)L_p^T(f)(1/M)U_p^{(p)}(f) = -D_{ps}(f)U_p^{(p)}(f)$ [см. (2.3.14)]. Так как в случае сильной помехи из (2.4.40) следует, что $H_2(f) \approx -D_{ps}(f)$, то в результате $U^{(p)}(f) = U_s^{(p)}(f) - D_{ps}(f)U_p^{(p)}(f) = 0$.

Помехоустойчивость рассматриваемой системы в общем случае определяется выражением (2.4.38), где $H_1(f) = 1$, а $H_2(f)$ есть величина, определяемая (2.4.40). Если принять, что шум по элементам АР не коррелирован, т. е. $N_0 = E$, то в случае сильной помехи КЧХ $H_1(f) = 1$ и $H_2(f) = -D_{ps}(f)$, что совпадает с этими характеристиками в выражении (2.4.37) для системы с оптимизированной КЧХ двумерного фильтра $H(f)$ [см. (2.4.34)].

В работах [5, 39] исследование субоптимальной СПВО, реализуемой по выходам сформированных пространственных каналов, выполнено на основе использования интегральных уравнений для случая узкополосных входных процессов. В статье [92] исследована система, подобная изображенной на рис. 2.15, где осуществляется обработка выходных процессов нескольких сформированных пространственных каналов (лучей) и определяется КЧХ $H(f)$ многомерного фильтра, оптимизирующего отношение с/ш на выходе его сумматора. Здесь оптимизируется отношение с/ш аналогично (2.2.1), но с дополнительным ограничением вида $L_s^T(f)H(f) = 1$ (смысл такого ограничения и особенности оптимизации в этом случае рассматриваются в разд. 3.2).

2.5. Синтез оптимальной системы на основе использования дискретных пространственно-временных выборочных значений реализаций поля

Синтез оптимального алгоритма обнаружения многомерного стохастического сигнала в области дискретное время — координаты элементов АР. Такой алгоритм [см. выражение (2.1.20)] для непрерывного задания времени был получен в разд. 2.1 на основе перехода из области $\{f, \bar{r}\}$ в область $\{t, \bar{r}\}$. Однако целесообразно рассмотреть задачу синтеза оптимальной СПВО непосредственно в области дискретное время — координаты элементов АР, что позволит перейти далее естественным образом к изучению способов расчета и анализа СПВО, реализуемых на основе применения многомерного фильтра на линиях задержек (ЛЗ).

Применительно к линейной АР с M элементами и L дискретными временными выборками на выходе, взятыми с шагом Δ на интервале наблюдения $(0, T)$ (т. е. в двумерной области $\{t, y\}$, где $t = l\Delta$; $y = md$, $l = 1, 2, \dots, L$; $m = 0, 1, \dots, M - 1$), плотность распределения LM -мерного вектора \mathcal{X} определяется формулой (1.4.1), а ОП — отношением плотностей $f(\mathcal{X}|H_1)$ и $f(\mathcal{X}|H_0)$, следующим из этой же формулы. С точностью до

постоянного слагаемого натуральный логарифм ОП определяется выражением

$$\Lambda(\mathcal{X}) = \frac{1}{2} \mathcal{X}^T [R_n^{-1} - (R_s + R_n)^{-1}] \mathcal{X} \quad (2.5.1)$$

Если воспользоваться следующим вариантом леммы об обращении матриц [57]:

$$(R_s + R_n)^{-1} = R_n^{-1} - R_n^{-1}(R_s^{-1} + R_n^{-1})^{-1}R_n^{-1}, \quad (2.5.2)$$

то алгоритм (10.1) принимает вид

$$\Lambda(\mathcal{X}) = \frac{1}{2} \mathcal{X}^T R_n^{-1}(R_s^{-1} + R_n^{-1})^{-1}R_n^{-1} \mathcal{X} \quad (2.5.3)$$

Дальнейшее упрощение алгоритма (2.5.3) связано с предположением о малости входного отношения с/ш, которое означает, что $\|R_s\| \ll \|R_n\|$, где $\|\cdot\|$ — норма матрицы. В таком случае

$$\Lambda(\mathcal{X}) \approx \frac{1}{2} \mathcal{X}^T R_n^{-1}R_sR_n^{-1} \mathcal{X} \quad (2.5.4)$$

Для последующего изложения целесообразно в соответствии с выражением (1.4.3) рассматривать матрицы R_n и R_s как блочные, образованные L^2 матрицами-блоками $R_n(l, k)$ и $R_s(l, k)$ размером $M \times M$ каждая, где $l, k = 1, 2, \dots, L$ [см. анализ формулы (1.4.3)]. На основе результатов разд. 2.1 будем считать, что выполнена предварительная компенсация АР в направлении ожидаемого сигнала. Тогда $R_s(l, k) = r_s(l, k)II^T$, где $r_s(l, k)$ — корреляционная функция сигнала.

Обозначим далее обратную матрицу R_n через Q и разобьем эту матрицу также на L^2 блоков $Q(l, k)$ размером $M \times M$. Связь матриц-блоков $R_n(l, k)$ и $Q(l, k)$ описывается системой L матричных уравнений ($l_1 = 1, 2, \dots, L$)

$$\sum_{k=1}^L R_n(l, k)Q(k, l_1) = \delta_{ll_1}E, \quad (2.5.5)$$

определяющих при каждом фиксированном l_1 L неизвестных матриц $Q(1, l_1), Q(2, l_1), \dots, Q(L, l_1)$ размером $M \times M$ каждая. И наконец, учтем, что вектор \mathcal{X} образован L векторами $\mathcal{X}(l)$ с M составляющими $x_m(l)$, где $m = 0, 1, \dots, M - 1$; $l = 1, 2, \dots, L$. С учетом сказанного выражение (2.5.4) определяет алгоритм обработки следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{z}^* &= \mathcal{X}^T Q R_s Q \mathcal{X} = \\ &= \sum_{l=1}^L \left[\sum_{k=1}^L \mathcal{X}^T(k) Q^T(l, k) I \right] \sum_{l_1=1}^L r_s(l, l_1) \left[\sum_{k=1}^L I^T Q(l_1, k) \mathcal{X}(k) \right], \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

где множитель 1/2 опущен. Введем вектор

$$\mathcal{H}^*(l, k) = Q^T(l, k)I \quad (2.5.7)$$

и представим алгоритм (2.5.6) в виде

$$\mathbf{z}^* = \sum_{l=1}^L \mathbf{u}^*(l) \sum_{l_1=1}^L r_s(l, l_1) \mathbf{u}^*(l_1), \quad (2.5.8)$$

где

$$\mathbf{u}^*(l) = \sum_{k=1}^l \mathbf{x}^T(k) \mathcal{H}^*(l, k). \quad (2.5.9)$$

Здесь $\mathcal{H}^*(l, k)$ – векторная ИХ многомерного линейного нестационарного фильтра с M составляющими, ИХ которых есть $h_m^*(l, k)$; $\mathbf{u}^*(l)$ – входной процесс, обеленный по шумовому полю; звездочка сверху отличает величины оптимальной дискретной СПВО от соответствующих величин оптимальной непрерывной СПВО – это означает, например, что в общем случае $h_m^*(l, k) = h_m^*(l \Delta, k \Delta) \neq h_m(t_1, t_2)$ при $t_1 = l \Delta$ и $t_2 = k \Delta$.

Положим, что входные процессы стационарны, тогда $R_s(l, k) = R_s(l - k) = R_s(l - k) I I^T$; $R_n(l, k) = R_n(l - k)$. Для матрицы $Q(l, k)$, как это следует из системы [см. (2.5.5)], в общем случае такая замена несправедлива, поэтому фильтр с ИХ [см. (2.5.7)] нестационарен. Однако в случае когда $T \gg \tau_{\text{кор}}$, целесообразно заменить $Q(l, k)$ на $Q(l - k)$ и соответственно [см. (2.5.7)] $\mathcal{H}^*(l, k)$ на $\mathcal{H}^*(l - k)$, так что

$$\mathbf{u}^*(l) = \sum_{k=1}^l \mathbf{x}^T(k) \mathcal{H}^*(l - k) = \sum_{m=1}^{M-1} \mathbf{u}_m^*(l) = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{k=1}^l h_m^*(l - k) x_m(k). \quad (2.5.10)$$

В работе [9] для стационарных процессов при выполнении условия $T \gg \tau_{\text{кор}}$ решение задачи синтеза оптимальных обнаружителей строится на основе использования стационарных фильтров. В книге [10 с. 218] рассмотрен пример замены ИХ нестационарного фильтра на ИХ стационарного. Показано, что при такой замене ошибка характеризует „краевой эффект“, обусловленный концами промежутка наблюдения. Относительный вклад этого эффекта тем меньше, чем меньше величина $\tau_{\text{кор}}$ по сравнению с T .

Таким образом, алгоритм (2.5.8) в случае большого интервала времени наблюдения определяется выражением

$$\mathbf{z}^* = \sum_{l=1}^L \mathbf{u}^*(l) \sum_{l_1=1}^l r_s(l - l_1) \mathbf{u}^*(l_1) = \sum_{l=1}^L \mathbf{u}^*(l) \mathbf{u}_s^*(l), \quad (2.5.11)$$

где $\mathbf{u}^*(l)$ вычисляется по формуле (2.5.10). Соответствующая этому алгоритму обработки функциональная схема оптимальной СПВО показана на рис. 2.17, а. Здесь результат вычисления внутренней суммы в (2.5.11) обозначен через $\mathbf{u}_s^*(l)$. Смысл этого обозначения здесь тот же, что и в выражении (2.1.42): $\mathbf{u}_s^*(l)$ – оценка сигнала в момент времени $t = l \Delta$, полученная в результате его оптимальной фильтрации из смеси с шумом.

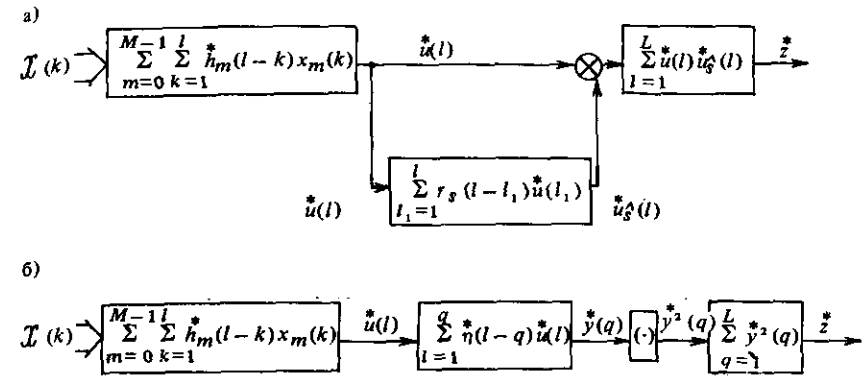


Рис. 2.17

Алгоритм (2.5.11) отвечает варианту реализации оптимальной СПВО в виде схемы оценщик – коррелятор и соответствующему ему алгоритму (2.1.43), если от интегралов перейти к суммам. Отличие здесь в пределах внутренней суммы по l_1 [конечных в (2.5.10) и (2.5.11)] связано с тем, что здесь оптимальная СПВО сразу синтезирована во временной области и является физически возможной.

Алгоритм обработки (2.5.11) можно преобразовать к виду, отвечающему варианту реализации оптимальной СПВО в виде схемы многомерный фильтр – скалярный фильтр – квадратор – интегратор. Для этого представим корреляционную функцию $r_s(l - l_1)$ в виде

$$r_s(l - l_1) = \sum_{q=1}^L \eta^*(l - q) \eta^*(l_1 - q), \quad (2.5.12)$$

где функция $\eta^*(l)$ – решение этого уравнения. В результате алгоритм (2.5.11) преобразуется к виду

$$\mathbf{z}^* = \sum_{q=1}^L \mathbf{y}^*(q) = \sum_{q=1}^L \left[\sum_{l=1}^q \eta^*(l - q) \mathbf{u}^*(l) \right]^2, \quad (2.5.13)$$

где $\mathbf{u}^*(l)$ определяется формулой (2.5.10). Алгоритм (2.5.13) также следует из непрерывного его варианта [см. (2.1.41)]. Функциональная схема оптимальной СПВО, отвечающая алгоритму (2.5.13), показана на рис. 2.17, б.

Векторная импульсная характеристика многомерного фильтра оптимальной СПВО и способы обеспечения ее физической возможности. Векторная ИХ $\mathcal{H}^*(t)$ содержит скалярные компоненты ИХ $h_m(t)$. Если функция $h_m(t)$ получена путем обратного Фурье-преобразования m -й компоненты $H_m(f)$ векторной КЧХ $H(f)$, то фильтр не является физически возможной динамической системой, так как не гарантировано выполнение условия $h_m(t - \lambda) = 0$ при $t < \lambda$. Однако помехоустойчивость такой системы максимальна и является (в смысле верхней границы) лишь потенциально достижимой для любых других систем в данной помехо-сигнальной

ситуации. В связи с этим оптимальную СПВО, точно реализующую алгоритм обработки (2.1.40) [или эквивалентный ему (2.1.11)], удобно принять за эталонную идеальную непрерывную систему, обеспечивающую потенциально достижимую помехоустойчивость (2.1.69). Когда интервал наблюдения T значительно больше интервала корреляции $\tau_{\text{кор}}$ входных процессов, помехоустойчивость СПВО с физически возможными фильтрами приближается к величине, вычисляемой по формуле (2.1.69).

Из структурной схемы оптимальной СПВО (см. рис. 2.1) видно, что она включает в себя три фильтра: два высокочастотных – многомерный и скалярный фильтры с КЧХ $H(f)$ и $h(f)$, определяемыми формулами (2.1.40), – и один низкочастотный фильтр-интегратор с постоянной времени T . ИХ высокочастотного фильтра (в частности, многомерного) также можно характеризовать некоторой эквивалентной постоянной времени, определяющей эффективный интервал обработки входной информации T_0 – эквивалентную конечную длительность ИХ $h_m(t)$. Величины T_0 и T являются параметрами системы обработки, а $\tau_{\text{кор}}$ – характеристикой входной информации. Понятно, что если между этими тремя величинами существует соотношение $\tau_{\text{кор}} \ll T_0 \ll T$, то помехоустойчивость такой физически возможной системы приближается к потенциально достижимой.

Наиболее простым, однако приближенным способом определения ИХ физически возможного фильтра, основанным на использовании функции $h_m(t)$, полученной обратным Фурье-преобразованием КЧХ $H_m(f)$, – усечение функции $h_m(t)$ на интервале времени обработки $(0, T_0)$, т. е. замена $h_m(t)$ на $h_m(t)u_{T_0}(t)$, где усекающая функция $u_{T_0}(t) = 1$ на интервале $(0, T_0)$ и нулю вне его. Заметим, что можно получить несколько большую помехоустойчивость, если усечение функции выполнить на симметричном интервале $(-T_0/2, T_0/2)$, а в полученную таким образом функцию $h_m(t)u_{T_0/2}(t)$ ввести задержку на время $T_0/2$ (сдвиг функции на время $T_0/2$ вправо). В результате фильтр с такой ИХ становится физически возможной динамической системой. На основе изложенного может быть так определена дискретная ИХ $\hat{h}_m^*(l)$: сначала с помощью обратного преобразования Фурье КЧХ $H_m(f)$ находится непрерывная ИХ $h_m(t)$ и усекается на интервале $(0, T_0)$ или $(-T_0/2, T_0/2)$; затем на этом интервале берутся N ее значений с шагом временной дискретизации Δ , образующих $\hat{h}_m^*(l) = h_m(t)$ при $t = l\Delta$.

Алгоритм оптимальной СПВО в его дискретном варианте [см. (2.5.10)], рассматриваемый здесь, удовлетворяет требованию физической возможности. Как видно из свертки (2.5.10), число дискрет ИХ $\hat{h}_m^*(l)$ должно быть равно L (так как переменная l пробегает все значения от единицы до L). Однако соотношение $T_0 \ll T$, рассмотренное выше, свидетельствует о том, что большая часть ординат дискретной функции $\hat{h}_m^*(l)$ будет иметь нулевые значения. Если положить $T_0 = N\Delta$ и учесть, что $T = L\Delta$, то в дискретном варианте условию $T_0 \ll T$ отвечает $N \ll L$. Поэтому для упрощения технической реализации многомерного фильтра свертку (2.5.10) можно вычислять на интервале, содержащем N точек и „скользящем” по основному интервалу в L точек, т. е. в (2.5.10) следует положить

$$\hat{u}_m^*(l) = \sum_{n=1}^N \hat{h}_m^*(n) x_m(l-n), \quad l=1, 2, \dots, L. \quad (2.5.14)$$

Аналогичное положение справедливо и для ИХ $r_s^*(l)$ свертки (2.5.11) в первом варианте алгоритма СПВО, а также ИХ $\hat{\eta}^*(l)$ свертки (2.5.13) – во втором его варианте. Например, в последнем случае, подобно (2.5.14), величина $\hat{y}^*(q)$, входящая в свертку (2.5.13),

$$\hat{y}^*(q) = \sum_{k=1}^{N'} \hat{\eta}^*(k) \hat{u}^*(q-k), \quad (2.5.15)$$

где в общем случае число дискрет N' импульсной характеристики $\hat{\eta}^*(l)$ может быть отличным от N для числа дискрет импульсной характеристики $\hat{h}_m^*(l)$.

Характеристики многомерного и скалярного фильтров, реализуемых путем использования линий задержек с отводами. Вместо обозначения $\hat{h}_m^*(l)$ далее примем для регулируемых весовых коэффициентов используемые обычно обозначения $\hat{w}_m^*(l)$ или эквивалентные им \hat{w}_{m1} . Функциональная схема фильтра на ЛЗ с регулируемыми весовыми коэффициентами, отвечающая m -й составляющей многомерного фильтра, показана на рис. 2.18, где Δ – единичная временная задержка. Число задержек, так же как и число весовых коэффициентов $\hat{w}_m^*(l)$, равно N . Этот фильтр называют также трансверсальным, а в цифровом варианте его реализации – нерекурсивным. Будем пока рассматривать непрерывный входной процесс $x_m(t)$, а поэтому и выходной процесс $u_m(t)$ также является непрерывной функцией времени. ИХ такого фильтра

$$\hat{w}_m^*(t) = \sum_{n=1}^N \hat{w}_{mn}^* \delta(t - n\Delta), \quad (2.5.16)$$

а связь его входа и выхода определяется сверткой

$$u_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}_m^*(t - \lambda) x_m(\lambda) d\lambda = \sum_{n=1}^N \hat{w}_{mn}^* x_m(t - n\Delta). \quad (2.5.17)$$

Для рассмотрения цифрового варианта реализации СПВО необходимо перейти от фильтра на ЛЗ к нерекурсивному дискретному фильтру, а также к входным и выходным дискретным последовательностям. Для этого достаточно в приведенных выше выражениях положить $t = l\Delta$, в результате

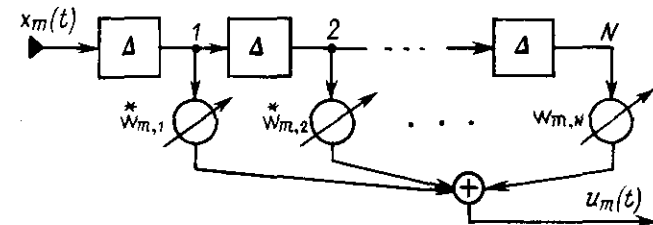


Рис. 2.18

чего, например, свертка (2.5.17) преобразуется в дискретную свертку типа (2.5.14):

$$\dot{u}_m(l) = \sum_{n=1}^N \dot{w}_{mn} x_m(l-n).$$

КЧХ $\dot{W}_m(f)$ фильтра на ЛЗ (нерекурсивного фильтра) находится путем Фурье-преобразования ИХ [см. (2.5.16)]:

$$\dot{W}_m(f) = \sum_{n=1}^N \dot{w}_{mn} e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n}. \quad (2.5.18)$$

Совокупность КЧХ $\dot{W}_m(f)$ для $m=0, 1, \dots, M-1$ образует векторную КЧХ $\dot{W}(f)$ многомерного фильтра, реализуемого на ЛЗ. Параметрами такого фильтра являются: величина единичной временной задержки Δ , число задержек N , а также MN весовых коэффициентов \dot{w}_{mn} . Массив N величин весовых коэффициентов $\dot{w}_{m1}, \dot{w}_{m2}, \dots, \dot{w}_{mN}$ (для фиксированного значения m — номера элемента АР) образует набор ординат ИХ физического возможного дискретного фильтра (рис. 2.19). Скалярный фильтр оптимальной СПВО с КЧХ $h(f)$ [см. (2.1.40)] также может быть реализован на ЛЗ с отводами. Обозначим через $\dot{v}^*(f)$ КЧХ такого фильтра

$$\dot{v}^*(f) = \sum_{n=1}^{N'} \dot{v}_n^* e^{-j \cdot 2\pi f \Delta' n}, \quad (2.5.19)$$

где \dot{v}_n^* — весовые коэффициенты скалярного фильтра, а его параметры N' и Δ' могут быть в общем случае отличны от таковых для $\dot{W}_m(f)$. В заключение приведем здесь запись алгоритма (2.5.13) для дискретного варианта реализации СПВО, когда ИХ многомерного и скалярного фильтров определяются весовыми коэффициентами \dot{w}_{mn} и \dot{v}_n^* , отвечающими общему случаю КЧХ $\dot{W}_m(f)$ [см. (2.5.18)] и $\dot{v}^*(f)$ [см. (2.5.19)] этих фильтров:

$$\dot{z} = \sum_{l=1}^L \left[\sum_{k=1}^{N'} \dot{v}_k^* \dot{u}(l-k) \right]^2; \quad \dot{u}(l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=1}^N \dot{w}_{mn} x_m(l-n). \quad (2.5.20)$$

Функциональная схема СПВО, определяемая этим алгоритмом, приведена на рис. 2.20.

Постановка задачи контролируемого выбора параметров многомерного и скалярного фильтров СПВО. Указанные выше параметры можно разделить на две группы: величины Δ , N и весовые коэффициенты. Параметры первой группы должны быть выбраны заранее, а после этого весовые коэффициенты могут быть определены в результате оптимизации их величин с целью обеспечения максимальной помехоустойчивости такой субоптимальной СПВО. Различные аспекты решения второй задачи будут рассмотрены подробно

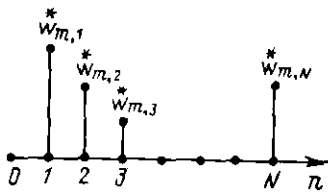


Рис. 2.19

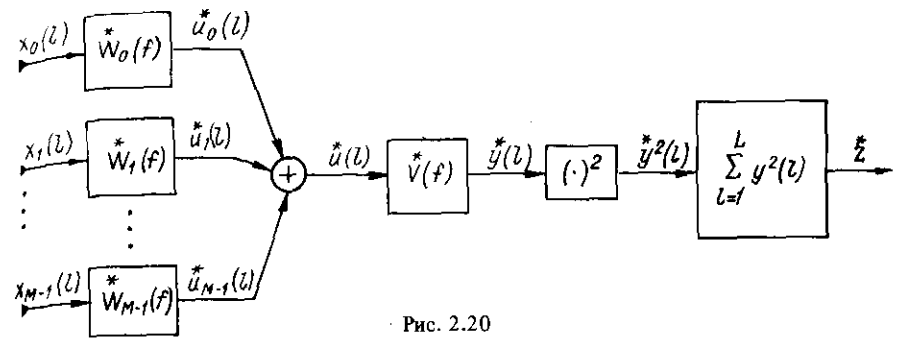


Рис. 2.20

далее в следующих главах, здесь же дадим постановку задачи выбора параметров N и Δ . Ясно, что чем больше N и меньше Δ , тем выше помехоустойчивость субоптимальной СПВО, но жестче требования к технической реализации системы. Поэтому необходимо выполнять контролируемый выбор параметров N и Δ на основе сравнения помехоустойчивости субоптимальной и оптимальной СПВО. Все сказанное можно отнести также к параметрам N' и Δ' скалярного фильтра [см. (2.5.19)].

Определим помехоустойчивость субоптимальной СПВО, имеющей многомерный фильтр с векторной КЧХ $\dot{W}(f)$ [компоненты которой $\dot{W}_m(f)$ находятся из формулы (2.5.18)] и послесумматорный скалярный фильтр с КЧХ $\dot{v}^*(f)$ [см. (2.5.19)]. Будем рассматривать пока непрерывный вариант системы, когда фильтры реализуются на ЛЗ и входные процессы $x_m(t)$ непрерывны. Для матриц ВСПМ сигнала и шума на элементах АР будем использовать уже принятые обозначения $G_s(f)$ и $G_n(f)$. Так же как и выше, будем оценивать помехоустойчивость рассматриваемой системы выходным отношением с/ш. Для его определения можно воспользоваться выражением (2.2.14), положив $\mathcal{H}(f) = \dot{W}(f)\dot{v}^*(f)$. В результате получаем

$$\dot{Q} = \frac{\sqrt{T} \int_0^{f_B} |\dot{v}^*(f)|^2 \overline{\dot{W}^T(f) G_s(f) \dot{W}(f)} df}{\left(\int_0^{f_B} [|\dot{v}^*(f)|^2 \overline{\dot{W}^T(f) G_n(f) \dot{W}(f)}] df \right)^{1/2}}. \quad (2.5.21)$$

Величина \dot{Q} определяется КЧХ $\dot{W}(f)$ и $\dot{v}^*(f)$ многомерного и скалярного фильтров субоптимальной СПВО, причем для данной помехо-сигнальной ситуации (характеризуемой матрицами $G_s(f)$ и $G_n(f)$) значение \dot{Q} [см. (2.5.21)] будет всегда меньше, чем соответствующая величина Q (2.1.69) оптимальной СПВО, т. е. $\dot{Q} < Q$, и лишь при $\Delta \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ величина $\dot{Q} \rightarrow Q$.

Наличие в системе скалярного послесумматорного фильтра позволяет путем оптимального выбора его КЧХ $\dot{v}^*(f)$ максимизировать отношение с/ш [см. (2.5.21)] при данной КЧХ многомерного фильтра $\dot{W}(f)$ и матрицах $G_s(f)$ и $G_n(f)$. В результате оптимальная КЧХ такого фильтра определяется аналогично (2.2.31):

$$\dot{v}_0(f) = \frac{\sqrt{\dot{W}^T(f) G_s(f) \dot{W}(f)}}{\dot{W}^T(f) G_n(f) \dot{W}(f)}, \quad (2.5.22)$$

а выражение (2.5.21) упрощается и принимает вид

$$\dot{Q} = \left(T \int_0^{f_B} \left[\frac{\dot{W}^T(f) G_s(f) \dot{W}(f)}{\dot{W}^T(f) G_n(f) \dot{W}(f)} \right]^2 df \right)^{1/2}, \quad (2.5.23)$$

подобной формуле (2.2.32). Использование в субоптимальной СПВО скалярного фильтра с оптимизированной КЧХ $\dot{v}^*(f)$, близкой к $\dot{v}_0^*(f)$ (2.5.22), вполне допустимо, так как такой фильтр в системе лишь один. Положим, что КЧХ $\dot{v}_0^*(f)$ реализуется точно, так что для определения величины индикаторного отношения с/ш \dot{Q} субоптимальной СПВО можно воспользоваться формулой (2.5.23).

Методика вычисления \dot{Q} в таком случае следующая: сначала фиксируют величины параметров Δ , N , далее находят MN величин весовых коэффициентов \dot{w}_{mn} , после этого по формуле (2.5.18) определяют M КЧХ $\dot{W}_m(f)$, являющихся компонентами векторной КЧХ $\dot{W}(f)$ многомерного фильтра. Конкретизируем выражение (2.5.23) для линейной АР, плосковолнового сигнала, описываемого матрицей ВСПМ [см. (2.1.3)], плосковолновой помехи и некоррелированного шума, описываемых матрицей ВСПМ [см. (2.3.2)], где $N_0(f) = E$. Векторная КЧХ $\dot{W}(f)$ имеет M составляющих $\dot{W}_m(f)$ [см. (2.5.18)]. В таком случае выражение (2.5.23) принимает вид

$$\dot{Q} = \left(T \int_{f_H}^{f_B} \left[\frac{\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=1}^N \dot{w}_{mn} e^{-j \cdot 2\pi f(\Delta n + \delta_{sm})}}{\sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^N \dot{w}_{mn} e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n} + \rightarrow \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=1}^N \dot{w}_{mn} e^{-j \cdot 2\pi f(\Delta n + \delta_{pm})}} \right]^2 df \right)^{1/2}, \quad (2.5.24)$$

где $-g_s(f)$, $g_n(f)$ и $g_p(f)$ — спектры сигнала, шума и помехи на выходе элемента АР; δ_s и δ_p — единичные временные задержки волновых фронтов сигнала и помехи, определяемые так же, как в формулах (2.1.3) и (2.3.1). В соответствии с изложенным выше величина \dot{Q} является функцией параметров Δ , N и MN весовых коэффициентов \dot{w}_{mn} . Так как в каждом конкретном случае задания величин Δ и N значения весовых коэффициентов оптимизируются, то можно найти такие величины Δ и N , при которых помехоустойчивость субоптимальной СПВО \dot{Q} будет близка к помехоустойчивости оптимальной СПВО Q . Таким образом может осуществляться контролируемый выбор параметров Δ и N системы.

Рассмотрим теперь методику оценки помехоустойчивости субоптимальной СПВО в зависимости от выбора величин параметров Δ' и N' скалярного фильтра с КЧХ $\dot{v}^*(f)$ [см. (2.5.19)]. При фиксированных величинах Δ' и N' следует определить весовые коэффициенты \dot{v}_k^* , оптимальным образом приближающие КЧХ $\dot{v}^*(f)$ [см. (2.5.19)] к КЧХ $\dot{v}_0^*(f)$ [см. (2.5.22)]. В результате может быть найдена КЧХ $\dot{v}^*(f)$ [см. (2.5.19)], а так как векторная КЧХ многомерного фильтра $\dot{W}(f)$ выбрана на предыдущем этапе, то тем самым определены все величины, входящие в отношение с/ш \dot{Q} [см. (2.5.21)].

Как видно из этой формулы, вычисление \dot{Q} достаточно трудоёмко. Его можно упростить, если принять, что КЧХ многомерного фильтра реализуется точно, т. е. $\dot{W}(f) = H(f)$. Тогда, например, при тех же исходных данных, что и использованные выше при выводе формулы (2.5.24), и соответствующем этому случаю выражении (2.3.5) для $H(f)$ из формулы (2.5.21) находим

$$\dot{Q} = \frac{M\sqrt{T} \int_{f_H}^{f_B} g_s(f) |\dot{v}^*(f)|^2 [1 - \gamma(f) R_{ps}^2(f)]^2 df}{\left(\int_{f_H}^{f_B} g_n^2(f) |\dot{v}^*(f)|^4 [1 - \gamma(f) R_{ps}^2(f)]^2 df \right)^{1/2}}, \quad (2.5.25)$$

где величины $\gamma(f)$ и $R_{ps}(f)$ определяются формулами (2.3.16). Исходя из выражения (2.5.25) параметры Δ' и N' могут быть выбраны на основе тех же соображений, что и изложенные выше при анализе формулы (2.5.24). Заметим, что в рассматриваемом случае КЧХ $\dot{v}_0^*(f) = \sqrt{g_s(f)/g_n(f)}$ [см. (2.5.22)], и в случае, если принять $\dot{v}^*(f) = \dot{v}_0^*(f)$, формула (2.5.25) переходит в (2.3.15).

2.6. Синтез оптимальной системы на основе использования дискретных частотно-волновых выборочных значений реализации поля

Синтез оптимального алгоритма обнаружения многомерного стохастического сигнала в частотно-волновой области. Для иллюстрации методики синтеза рассмотрим линейную АР с M элементами, расположенную на оси ОУ, так что указанная область есть $\{f, \varphi_y\}$. Для синтеза воспользуемся распределением (1.4.24) при гипотезе H_0 , когда матрица $\dot{\Phi}_n(f_k)$ обусловлена только шумом, и при альтернативе H_1 , когда эта матрица $\dot{\Phi}_n(f_k) + \dot{\Phi}_s(f_k)$ обусловлена как шумом, так и сигналом [вектор $\mathcal{U}_x(f_k) = 0$ в обоих случаях]. С точностью до постоянного слагаемого натуральный логарифм ОП определяется из (1.4.24) выражением

$$\Lambda(\dot{\mathcal{X}}) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N/2} \dot{\mathcal{X}}^T(f_k) \{ \dot{\Phi}_n^{-1}(f_k) - [\dot{\Phi}_n(f_k) + \dot{\Phi}_s(f_k)]^{-1} \} \dot{\mathcal{X}}(f_k). \quad (2.6.1)$$

Положим, что поле сигнала плосковолновое, а поэтому его частотно-волновая матрица $\Phi_s(f)$ определяется в соответствии с формулой (1.5.16). Поле помех конкретизировать не будем. Таким образом,

$$\Phi_s^*(f) = g_s(f) \bar{\mathcal{L}}_s(f) \mathcal{L}_s^T(f); \quad \Phi_n^*(f) = g_n(f) \mathcal{N}(f), \quad (2.6.2)$$

где $\mathcal{N}(f)$ — матрица взаимных волновых спектров поля шума на элементах АР. Если воспользоваться формулами (2.6.2) и тождеством (2.1.5) то (2.6.1) можно представить в виде

$$\Lambda(\mathcal{X}^*) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N/2} \frac{g_s(f_k)/g_n^2(f_k)}{1 + [g_s(f_k)/g_n(f_k)] \mathcal{L}_s^T(f_k) \mathcal{N}^{-1}(f_k) \bar{\mathcal{L}}_s(f_k)} \times \\ \times |\mathcal{X}^{*T}(f_k) \mathcal{N}^{-1}(f_k) \bar{\mathcal{L}}_s(f_k)|^2. \quad (2.6.3)$$

Предположим, что входное отношение с/ш мало, тогда алгоритм обработки (2.6.3) упрощается и принимает вид

$$\Lambda(\mathcal{X}^*) \approx \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N/2} \frac{g_s(f_k)}{g_n^2(f_k)} |\mathcal{X}^{*T}(f_k) \mathcal{N}^{-1}(f_k) \bar{\mathcal{L}}_s(f_k)|^2. \quad (2.6.4)$$

Далее, аналогично (2.1.2), перейдем к непрерывным значениям временной частоты

$$\Lambda(\mathcal{X}^*) = \int_{-f_B}^{f_B} \frac{g_s(f)}{g_n^2(f)} |\mathcal{X}^{*T}(f) \mathcal{N}^{-1}(f) \bar{\mathcal{L}}_s(f)|^2 df. \quad (2.6.5)$$

Обозначим комплексную частотно-волновую характеристику (КЧВХ) многомерного фильтра

$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{N}^{-1}(f) \bar{\mathcal{L}}_s(f), \quad (2.6.6)$$

а КЧХ скалярного фильтра, как и ранее, $h(f) = \sqrt{g_s(f)/g_n(f)}$. В таком случае алгоритм (2.6.5) можно записать в виде

$$\Lambda(\mathcal{X}^*) = z = \int_{-f_B}^{f_B} h^2(f) |\mathcal{X}^{*T}(f) \mathcal{H}(f)|^2 df. \quad (2.6.7)$$

Несмотря на внешнее сходство этих выражений с аналогичными формулами, приведенными в разд. 2.1, смысл входящих сюда величин существенно различается. Так, если в формуле (2.1.11) $X(f)$ и $H(f)$ есть M -мерные векторы, компоненты которых отвечают M элементам АР с номерами $m=0, 1, \dots, M-1$, то в формуле (2.6.7) $\mathcal{X}^*(f)$ и $\mathcal{H}(f)$ это также M -мерные векторы, но их компоненты отвечают M пространственным частотам $\varphi_r = r/L$, где $r=0, 1, \dots, M-1$. При этом, если число компонент векторов $X(f)$ и $H(f)$ однозначно определяется числом элементов антенны,

равным M , то число компонент векторов $\mathcal{X}^*(f)$ и $\mathcal{H}(f)$ принято таковым искусственно в результате использования дискретных значений пространственных частот, кратных величине $1/L$ (в принципе, число этих дискрет может быть любым). Вместе с тем между процедурами обработки (2.1.11) в области $\{f, \vec{r}\}$ и (2.6.7) в области $\{f, \vec{\varphi}\}$ существует тесная связь, более того, один алгоритм может быть преобразован в другой. Действительно, основываясь на определении Фурье-преобразования по пространству (1.4.11) для r -й компоненты вектора $\mathcal{X}^*(f)$, где $\varphi_r = \varphi_r = r/Md$, имеем

$$\mathcal{X}^*(f, \varphi_r) = \sum_{m=0}^{M-1} X_m(f) e^{j \frac{2\pi}{M} r m}, \quad (2.6.8)$$

где $X_m(f) = \int_0^T x_m(t) \exp(-j \cdot 2\pi f t) dt$, причем, как это принято в теории поля [11], в экспоненте прямого преобразования (2.6.8) используется знак „плюс“. Аналогично для r -й компоненты вектора $\mathcal{H}(f)$

$$\mathcal{H}(f, \varphi_r) = \sum_{m=0}^{M-1} H_m(f) e^{-j \frac{2\pi}{M} r m}, \quad (2.6.9)$$

причем здесь использовано сопряженное преобразование по пространству, а $H_m(f)$ есть m -я составляющая вектора $H(f)$ [см. (2.1.9)]. Скалярное произведение, определяемое алгоритмом обработки (2.6.7),

$$\mathcal{X}^{*T}(f) \mathcal{H}(f) = \sum_{r=0}^{M-1} \mathcal{X}^*(f, \varphi_r) \mathcal{H}(f, \varphi_r). \quad (2.6.10)$$

Подставив сюда выражения (2.6.8) и (2.6.9), находим

$$\mathcal{X}^{*T}(f) \mathcal{H}(f) = \sum_{m=0}^{M-1} X_m(f) \sum_{n=0}^{M-1} H_n(f) \frac{1 - e^{j \cdot 2\pi (m-n)}}{1 - e^{j (2\pi/M) (m-n)}}.$$

Дробный множитель в этом выражении равен M при $n=m$ и 0 при $n \neq m$, а поэтому получаем

$$\mathcal{X}^{*T}(f) \mathcal{H}(f) = M \sum_{m=0}^{M-1} X_m(f) H_m(f) = M X^T(f) H(f). \quad (2.6.11)$$

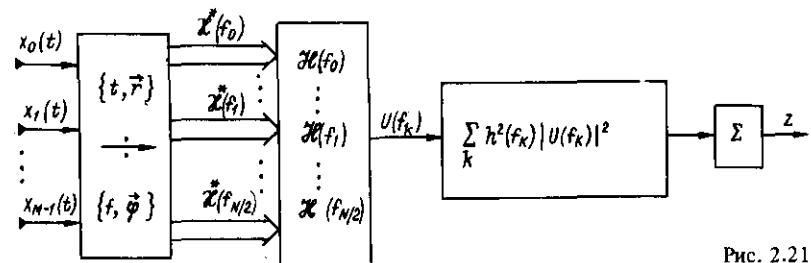


Рис. 2.21

Таким образом, алгоритм обработки (2.6.7) в частотно-волновой области тождествен (с точностью до постоянного множителя M) алгоритму (2.1.11) в области частота – координаты элементов АР [этот результат закономерен, так как равенство (2.6.11) представляет собой известную формулу Парсеваля].

Функциональная схема оптимальной СПВО в частотно-волновой области. Эта схема определяется алгоритмом обработки (2.6.7) или его вариантом (2.6.4) для дискретных значений временной частоты f_k . Основные функциональные блоки алгоритма обработки показаны на рис. 2.21. Первый блок отвечает преобразованию (1.4.11) M -мерного процесса $x_m(t)$ с выхода элементов АР в $M(N/2+1)$ -мерный вектор двумерных изображений $\mathcal{X}(f_k, \varphi_r)$ для $N/2+1$ временных частот f_k и M пространственных частот φ_r (на рис. 2.21 двойными стрелками показаны $N/2+1$ векторов $\mathcal{X}(f_k)$ каждый с M составляющими, отвечающими пространственным частотам φ_r). Следующий этап обработки сводится к выполнению пространственной фильтрации, осуществляемой в частотно-волновой области. С этой целью вычисляется скалярное произведение $U(f_k) = \mathcal{X}^T(f_k)\mathcal{X}(f_k)$ для каждой фиксированной частоты f_k , определяемое как сумма произведений составляющих этих векторов, отвечающих M значениям φ_r пространственной частоты. В результате пространственной фильтрации осуществляется, как следует из выражения (2.6.5), обеление поля шума в частотно-волновой области – умножение вектора \mathcal{X} на обратную матрицу \mathcal{N}^{-1} ; умножение вектор-строки $\mathcal{X}^T \mathcal{N}^{-1}$ на вектор-столбец \mathcal{L}_s , завершающее процедуру пространственной фильтрации, отвечает формированию ХН в частотно-волновой области. Дальнейшая обработка подобна рассмотренной в разд. 2.1 для СПВО в частотной области.

Интересно рассмотреть особенности процедуры формирования ХН в частотно-волновой области [19]. Чтобы получить эту характеристику в „чистом виде”, примем, что поле шума не коррелировано на элементах АР, т. е. в (2.6.5) положим матрицу $\mathcal{N}(f) = E$. В таком случае пространственная фильтрация сводится к вычислению скалярного произведения $\mathcal{X}^T(f)\mathcal{L}_s(f)$, причем в выражении $\mathcal{L}_s(f, \varphi_r)$ [см. (1.5.15)] $\alpha_0 = \alpha_s$ есть угол, определяющий направление ожидаемого сигнала. Таким образом, формирование ХН в частотно-волновой области осуществляется в два этапа: вначале находится двумерное изображение совокупности процессов, поступающих с выходов элементов АР, после этого для фиксированной временной частоты находится величина $U(f) = \mathcal{X}^T(f)\mathcal{L}_s(f)$, которая определяет Фурье-изображение выхода пространственного канала АР, компенсированной в направлении α_s . Важно отметить, что один и тот же вектор двумерного изображения $\mathcal{X}(f)$ позволяет сформировать ХН для различных направлений α_s путем использования векторов $\mathcal{L}_s(f)$ для соответствующих углов α_s .

Убедимся, что сформулированное выше утверждение о смысле величины $U(f)$ справедливо. Действительно, r -я составляющая $\mathcal{L}_s(f, \varphi_r)$ определяется формулой (1.5.15), причем в соответствии с выражением (1.5.17) эта составляющая есть Фурье-изображение функции $\exp(-j \cdot 2\pi f \tau_m)$ по переменной m ; для линейной АР $\tau_m = (dm \sin \alpha_s)/c$.

Таким образом, если для представления $\mathcal{L}_s(f, \varphi_r)$ воспользоваться формулой (2.6.9), определяющей сопряженное изображение, то преобразуемой функцией пространственной координаты m будет указанная выше экспонента. Для составляющей $\mathcal{X}(f, \varphi_r)$ справедлива формула (2.6.8). Следовательно

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^T(f)\mathcal{L}_s(f) &= \sum_{m=0}^{M-1} X_m(f) \sum_{n=0}^{M-1} e^{j \cdot 2\pi f \tau_n} \frac{1 - e^{j \cdot 2\pi(m-n)}}{1 - e^{j(2\pi/M)(m-n)}} = \\ &= M \sum_{m=0}^{M-1} X_m(f) e^{j \cdot 2\pi f \tau_m} = M X^T(f) \bar{L}_s(f), \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

что совпадает с (2.6.11), когда $\mathcal{N}(f) = E$, и поэтому $H(f) = \bar{L}_s(f)$, как это следует из (2.1.9). Выражение (2.6.12) определяет процедуру формирования ХН в области $\{f, \tau\}$, рассмотренную в разд. 2.1. Таким образом, процедуры формирования ХН во всех трех областях эквивалентны и могут быть преобразованы одна в другую.

В случае линейной АР для ускорения вычисления двумерного преобразования Фурье может быть использован алгоритм двумерного БПФ [см. (1.5.20)]. В результате алгоритм обработки (2.6.7), реализуемый для $N/2+1$ временных частот $f_k = k/N\Delta$ и M пространственных частот $\varphi_r = r/Md$, принимает вид

$$\Lambda(\mathcal{X}^{**}) = \sum_{k=0}^{N/2} h^2(k) \left| \sum_{r=0}^{M-1} \mathcal{X}^{**}(k, r) \mathcal{H}(k, r) \right|^2. \quad (2.6.13)$$

Рассмотрим, как может быть использован алгоритм двумерного БПФ для формирования ХН в частотно-волновой области [19]. Из выражения (2.6.12) видно, что изображение выходного процесса пространственного канала линейной АР, скомпенсированной в направлении α_s , определяется для данной временной частоты f_k соотношением

$$U(k) = \sum_{r=0}^{M-1} \mathcal{X}^{**}(k, r) \bar{\mathcal{L}}_s(k, r), \quad (2.6.14)$$

где величина $\bar{\mathcal{L}}_s(k, r)$ следует из формулы (1.5.15) при $f_k = k/N\Delta$ и $\varphi_r = r/Md$. Величина $U(k)$ представляет собой одномерное Фурье-изображение (на частоте f_k) выходного процесса $u(t)$ пространственного канала, сформированного во временной области. Совокупность изображений $U(k)$ при $k=0, 1, \dots, N/2$ используется для последующей обработки (см. рис. 2.21).

В работах [22, 47] рассматривается следующий способ применения алгоритма двумерного БПФ для формирования ХН линейной АР. В соответствии с формулой (2.6.12) для частоты $f = k/N\Delta$ и явного выражения задержек $\tau = (dm \sin \alpha_s)/c$ получим изображение

$$\hat{U}(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \hat{X}_m(k) \exp \left[j \frac{2\pi}{N} \left(\frac{d}{\Delta c} \sin \alpha_s \right) km \right], \quad (2.6.15)$$

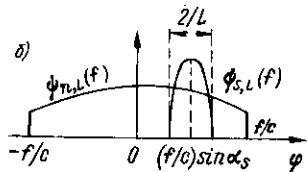
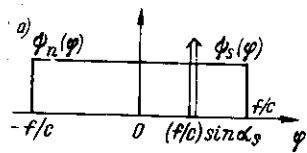


Рис. 2.22

где $\tilde{X}_m(k)$ – в соответствии с (1.5.22) изображение дискретной последовательности $x_m(n\Delta)$ на частоте $f = k/N\Delta$. С другой стороны, из формулы (2.6.8) для дискретной последовательности $\tilde{X}_m(f)$ при $f = k/N\Delta$ имеем

$$\tilde{\mathcal{X}}^*(k, r) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{X}_m(k) \exp\left(j \frac{2\pi}{M} rm\right). \quad (2.6.16)$$

Сравним между собой последние два выражения. Если между параметрами, входящими в показатели экспонент, существует такая связь, что величина $(M/N)(d/\Delta c)\sin\alpha_s = l$ есть целое число, то для значения $r = lk$ двумерное

изображение $\tilde{\mathcal{X}}^*(k, r)$ [см. (2.6.16)] совпадает с одномерным изображением $\tilde{U}(k)$ [см. (2.6.15)]. Ясно, что такой способ использования двумерных изображений $\tilde{\mathcal{X}}^*(k, r)$ для формирования ХН линейной АР имеет ограничения, связанные с выполнением условия равенства величины $(M/N)(d/\Delta c)\sin\alpha_s$ целому числу.

Использование частотно-волновых характеристик для анализа эффективности СПВО. Рассмотрим ситуацию, когда имеются плосковолновой сигнал и изотропное поле шума, причем ограничимся их представлением в плоскости XOY (см. рис. 1.6). В таком случае можно использовать одномерные волновые спектры – сигнала [см. (1.3.15)] при $\tau=0$, т. е. $\Psi_s(\varphi_y)$, и шума [см. (1.3.19)] $\Psi_n(\varphi)$. Для упрощения проекцию пространственной частоты φ_y будем обозначать далее через φ . ЧВС сигнала и шума, таким образом, есть соответственно $\Phi_s(f, \varphi) = g_s(f)\Psi_s(\varphi)$ и $\Phi_n(f, \varphi) = g_n(f)\Psi_n(\varphi)$. Как следует из выражения (1.5.13), волновой спектр сигнала

$$\Psi_s(\varphi) = \delta[(f/c)\sin\alpha_s - \varphi], \quad (2.6.17)$$

а волновой спектр шума в соответствии с (1.5.24)

$$d \cdot \tilde{\Psi}_n(\varphi) = \Psi_n(\varphi) = \begin{cases} c/2f & \text{при } -f/c \leq \varphi < f/c; \\ 0 & \text{при } f/c \leq \varphi < -f/c, \end{cases} \quad (2.6.18)$$

причем в этих выражениях $f > 0$, а сама частота является лишь параметром. Приведенные зависимости иллюстрируются рис. 2.22, а.

При измерении волновых спектров пространственных реализаций полей возникают те же проблемы, что и при частотном анализе случайного процесса $x(t)$, заданного конечной его реализацией $x_T(t)$ на интервале времени $|t| \leq T/2$. В связи с этим интервал разрешения частот будет иметь величину порядка $1/T$. Поэтому при необходимости повышения разрешающей способности частотного анализа требуется обычно увеличивать длительность обрабатываемой реализации $x_T(t)$.

Положим, что измерение поля выполняется с помощью его реализации $x_L(t, y)$ на непрерывной линейной антенне длиной L , так что $y \in (-L/2, L/2)$. В соответствии с изложенным в разд. 1.3 найдем Фурье-изображение по пространству реализации $x_L(t, y)$

$$\mathcal{X}_L(\varphi) = \int_{-L/2}^{L/2} X_L(f, y) e^{j \cdot 2\pi\varphi y} dy, \quad (2.6.19)$$

где $X_L(f, y)$ – Фурье-преобразование реализации $x_L(t, y)$ по времени на частоте f . Однако анализируемая пространственная функция поля $X(f, y)$ (функция координаты y при фиксированной частоте f) связана с ее реализацией на антенне длиной L соотношением

$$X_L(f, y) = X(f, y) u_L(y), \quad (2.6.20)$$

где усекающая функция $u_L(y) = 1$ при $|y| \leq L/2$ и $u_L(y) = 0$ при других y . Поэтому можем записать

$$\mathcal{X}_L(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f, y) u_L(y) e^{j \cdot 2\pi\varphi y} dy. \quad (2.6.21)$$

В таком случае, подобно формуле (1.3.23), находим волновой спектр

$$\Psi_L(\varphi) = M \left\{ \frac{1}{L} |\mathcal{X}_L(\varphi)|^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(z) \left[\frac{\sin \pi L(\varphi - z)}{\pi L(\varphi - z)} \right]^2 dz. \quad (2.6.22)$$

Это выражение связывает волновой спектр поля $\Psi(\varphi)$ с его спектром $\Psi_L(\varphi)$, измеренным на основе конечной реализации поля $x_L(t, y)$.

Найдем теперь волновые спектры полей сигнала и шума с учетом их обработки антенной. Подставив формулу (2.6.17) в выражение (2.6.22) для сигнала, находим

$$\Psi_{s, L}(\varphi) = \left\{ \frac{\sin \pi L [\varphi - (f/c) \sin \alpha_s]}{\pi L [\varphi - (f/c) \sin \alpha_s]} \right\}^2, \quad (2.6.23)$$

что согласуется с выражением (1.5.18) для линейной АР с M элементами и межэлементным расстоянием d . Аналогично для спектра поля шума [см. (2.6.18)] находим

$$\Psi_{n, L}(\varphi) = \frac{c}{2f} \int_{-f/c}^{f/c} \left[\frac{\sin \pi L(\varphi - z)}{\pi L(\varphi - z)} \right]^2 dz, \quad (2.6.24)$$

что согласуется с выражением (1.5.25) при $\varphi_i = \varphi$. Таким образом, волновой спектр сигнала $\Psi_{s, L}(\varphi)$ [см. (2.6.23)], измеренный на выходе антенны, уже не является дельта-функцией, как спектр $\Psi_s(\varphi)$ [см. (2.6.17)] исходного плосковолнового поля: спектр $\Psi_{s, L}(\varphi)$ тем ближе к $\Psi_s(\varphi)$, чем больше длина антенны L по сравнению с длиной волны $\lambda = c/f$. Аналогичное положение имеет место и в отношении спектра поля шума

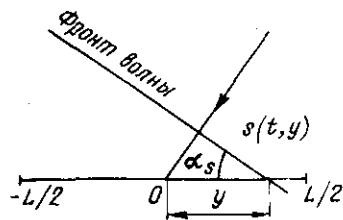


Рис. 2.23

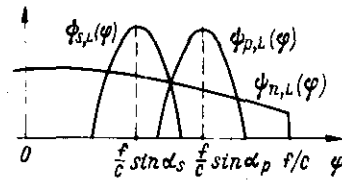


Рис. 2.24

$\Psi_{n, L}(\varphi)$. Примерный вид спектров $\Psi_{s, L}(\varphi)$ и $\Psi_{n, L}(\varphi)$ показан на рис. 2.22, б.

В идеальном случае, когда $L \gg \lambda$ и волновой спектр шума практически постоянен в интервале пространственных частот, определяемом шириной главного лепестка спектра сигнала и равном $2/L$, для пространственной фильтрации плосковолнового сигнала (как это следует из рис. 2.22, а) можно использовать узкополосный пространственный фильтр с центральной пространственной частотой $\varphi = (f/c) \sin \alpha_s$, или, другими словами, реализовать ХН с узким главным лепестком и низким уровнем боковых лепестков (таким образом, имеется полная аналогия случаю временной фильтрации гармонического сигнала на фоне белого шума). Если условие $L \gg \lambda$ не выполняется, то волновой спектр поля с плоским фронтом, измеренный с помощью антенны длиной L , имеет конечную ширину главного лепестка порядка $2/L$, а уровень волнового спектра поля шума уже отличен от постоянной величины на этом интервале (см. рис. 2.22, б). Следовательно, для оптимизации пространственной фильтрации необходимо использовать некоторое амплитудно-фазовое распределение, реализуемое с помощью многомерного фильтра.

Теперь убедимся, что при использовании традиционного компенсатора антенны волновые спектры полей сигнала и шума действительно определяются выражениями (2.6.23) и (2.6.24). Реализация полей сигнала и шума на антенне $x(t, y) = s(t, y) + n(t, y)$. Так как поле сигнала плосковолновое, то в момент t в точке с координатой y (рис. 2.23) поле сигнала [см. (1.3.9)] $s(t, y) = s[t - (y/c) \sin \alpha_s]$, где запаздывание $\tau_y = (y/c) \sin \alpha_s$. Соответственно в частотной области изображение реализации сигнала $S(f, y) = S(f) \exp[-j \cdot 2\pi (y/c) \sin \alpha_s]$. Традиционное УФХН компенсирует запаздывание $-\tau_y$ в точке y , а затем „интегрирует” компенсированную таким образом реализацию поля $x(t + \tau_y, y)$ по длине антенны, так что выходом УФХН является функция

$$u(t) = \int_{-L/2}^{L/2} x[t + (y/c) \sin \alpha_s, y] dy.$$

Для изображений, соответствующих этим временным функциям,

$$U(f) = \int_{-L/2}^{L/2} X(f, y) e^{j \cdot 2\pi (f/c) y \sin \alpha_s} dy. \quad (2.6.25)$$

Положим, что изображение $X(f, y)$ отвечает плоской волне с амплитудой $1/L$, т. е. $X(f, \varphi) = (1/L) \exp(-j \cdot 2\pi \varphi y)$. Отсюда находим

$$U(f) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-j \cdot 2\pi [\varphi - (f/c) \sin \alpha_s] y} dy = \frac{\sin \pi L [\varphi - (f/c) \sin \alpha_s]}{\pi L [\varphi - (f/c) \sin \alpha_s]}. \quad (2.6.26)$$

Эта формула определяет частотную характеристику пространственного фильтра с центральной пространственной частотой $\varphi_s = (f/c) \sin \alpha_s$, реализуемого с помощью непрерывной антенны длиной L , компенсированной в направлении, определяемом углом α_s . А так как волновые спектры мощности на выходе и входе такого фильтра связаны между собой квадратом модуля его частотной характеристики, то выражение (2.6.26) действительно отвечает полученным выше формулам (2.6.23) и (2.6.24) для спектров полей сигнала и шума. Если в формуле (2.6.26) принять $\varphi = (f/c) \sin \alpha$, где α — текущий угол, то получаем ХН линейной антенны с равномерным распределением, компенсированной в направлении α_s [58].

Рассмотрим теперь случай, когда на вход антенны кроме сигнала и шума воздействует также локальная помеха. Волновой спектр плосковолновой помехи $\Psi_{p, L}(\varphi)$, приходящей с направления α_p , определяется выражением, аналогичным (2.6.23). Рассматриваемая ситуация изображена на рис. 2.24. Эффективность использования оптимального алгоритма СПВО определяется взаимным расположением и степенью перекрытия волновых спектров $\Psi_{s, L}(\varphi)$ и $\Psi_{p, L}(\varphi)$ сигнала и помехи, т. е. разностью углов α_s и α_p , а также соотношением длин антенны L и волны $\lambda = f/c$. Ясно, что в двух крайних случаях, когда волновые спектры сигнала и помехи перекрываются полностью или почти не перекрываются, традиционная пространственная обработка с помощью УФХН практически даст тот же результат, что и алгоритм оптимальной СПВО. Оптимизация СПВО эффективна в ситуациях, промежуточных по отношению к этим крайним случаям. При этом, как было показано в разд. 2.1, эффективность оптимизации СПВО для линейной АР (при заданных интенсивностях сигнала, шума и помехи) определяется ХН решетки, компенсированной в направлении прихода сигнала α_s , для ее значения, отвечающего углу прихода помехи [см. (2.3.22)].

Следуя принятому способу определения помехоустойчивости СПВО с помощью индикаторного отношения c/\mathcal{N} , найдем его выражение через частотно-волновые характеристики системы и спектры полей сигнала и шума на входе антенны. Для этого нужно определить математическое ожидание выходного эффекта z , обусловленное сигналом, и его дисперсию, обусловленную шумом. Это нетрудно сделать, используя полученные в разд. 2.1 выражения и зависимость (2.6.11), в соответствии с которой $X^T H = (1/M) \mathcal{X}^T \mathcal{H}$. В результате находим характеристики выходного эффекта:

$$\left. \begin{aligned} \Delta m &= (2T/M^2) \int_0^{f_B} h^2(f) g_s(f) |\bar{\mathcal{H}}^T(f) \bar{\mathcal{L}}_s(f)|^2 df; \\ \sigma_0^2 &= (4T/M^4) \int_0^{f_B} [h^2(f) g_n(f) \bar{\mathcal{H}}^T(f) \mathcal{N}(f) \mathcal{H}(f)]^2 df, \end{aligned} \right\} (2.6.27)$$

где $h^2(f) = g_s(f)/g_n^2(f)$. В результате величина $\Delta m/\sigma_0$ определяет индикаторное отношение с/ш

$$Q = \frac{\sqrt{T} \int_0^{f_B} [g_s^2(f)/(g_n^2(f)) |\bar{\mathcal{H}}^T(f) \bar{\mathcal{L}}_s(f)|^2 df]}{\left\{ \int_0^{f_B} [(g_s(f)/g_n(f)) \bar{\mathcal{H}}^T(f) \mathcal{N}(f) \mathcal{H}(f)]^2 df \right\}^{1/2}} (2.6.28)$$

Если КЧВХ $\mathcal{H}(f)$ отвечает оптимальному алгоритму обработки информации в частотно-волновой области и удовлетворяет равенству (2.6.6), то выражение (2.6.28) принимает вид

$$Q = \left\{ T \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [\mathcal{L}_s^T(f) \mathcal{N}^{-1}(f) \mathcal{L}_s(f)]^2 df \right\}^{1/2} (2.6.29)$$

и, подобно (2.1.69), величина Q определяется частотными и волновыми спектрами полей сигнала, шума и помех.

Интересно рассмотреть особенности реализации алгоритма оптимальной СПВО в частотно-волновой области и способов оценки ее эффективности при условии, что $L/\lambda \gg 1$. Как уже отмечалось в разд. 1.5, в таком случае частотно-волновые матрицы типовых полей близки к диагональным. Это означает, что близка к диагональной и матрица $\mathcal{N}^0(f)$, определяющая алгоритм оптимальной обработки (2.6.5). В результате существенно упрощается как сама процедура обработки, требующая нахождения обратной матрицы $\mathcal{N}^{-1}(f)$, так и методы исследования эффективности СПВО.

Рассмотрим теперь применение формулы (2.6.29) для оценки эффективности СПВО. Положим, что на вход линейной АР действует аддитивная смесь полей изотропного шума и плосковолновой локальной помехи, частотно-волновые матрицы которых описываются выражениями вида (2.6.2), так что матрица суммарного поля

$$\begin{aligned} \Phi_n^*(f) + \Phi_p^*(f) &= g_n(f) [\mathcal{N}^0(f) + \\ &+ (g_p(f)/g_n(f)) \bar{\mathcal{L}}_p(f) \mathcal{L}_p^T(f)] = g_n(f) \mathcal{N}(f), \end{aligned} (2.6.30)$$

где вектор $\mathcal{L}_p(f)$ определяется формулой (1.5.15) для угла прихода локальной помехи a_p . Из сравнения выражений (2.6.30) и (2.3.2) видно, что по своей структуре они идентичны, а поэтому, используя формулу (2.3.12), можем сразу записать выходное отношение с/ш оптимальной СПВО для соответствующих исходных величин, определенных в частотно-волновой области,

$$\begin{aligned} Q &= \left(T \int_{f_H}^{f_B} g_s^2(f) / g_n^2(f) \{ \mathcal{L}_s^T(f) \mathcal{N}^{-1}(f) [\bar{\mathcal{L}}_s(f) - \right. \\ &\left. - \eta_p(f) \bar{\mathcal{L}}_p(f)] \}^2 df \right)^{1/2} \end{aligned} (2.6.31)$$

где выражение для $\eta_p(f)$ следует из (2.3.6) с соответствующей заменой величин. Примем, что матрица $\mathcal{N}^0(f)$ диагональная и элементы ее главной диагонали определяются правой частью формулы (1.5.26), т. е. равны величине $M\lambda/2d = M^2/K(f)$, где $K(f) = 2Lf/c$. Как следует из (2.6.11), скалярные произведения равны $\mathcal{L}_s^T \mathcal{L}_s = M L_s^T L_s = M^2$; $\mathcal{L}_s^T \mathcal{L}_p = M L_s^T L_p = = M^2 D_{sp}$; $\mathcal{L}_p^T \mathcal{L}_s = M L_p^T L_s = M^2 D_{ps}$ [см. также (2.3.14)], а поэтому из формулы (2.6.31) получаем

$$Q = \left\{ T \int_{f_H}^{f_B} K^2(f) \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left[1 - \frac{g_p(f) R_{ps}(f)}{g_n(f)/K(f) + g_p(f)} \right]^2 df \right\}^{1/2}, (2.6.32)$$

где величина $R_{ps}(f)$ определяется формулой (2.3.16). Если в выражении (2.6.32) принять $K(f) = M$, то оно совпадает с (2.3.15).

В частном случае лишь изотропного поля шума из (2.6.32) при $g_p(f) = 0$ следует

$$Q = \left(T \int_{f_H}^{f_B} [K(f) g_s(f)/g_n(f)]^2 df \right)^{1/2}. (2.6.33)$$

Выходное отношение с/ш Q (2.6.33), определяющее помехоустойчивость оптимальной СПВО, получено в предположении, что частотно-волновая матрица изотропного шума $\mathcal{N}^0(f)$ диагональная. Нетрудно видеть, что при этом помехоустойчивость традиционной системы, реализуемой в частотно-волновой области, будет та же, что и оптимальной. Это следует из формулы (2.6.28) при $\mathcal{H}(f) = \bar{\mathcal{L}}_s(f)$, $\mathcal{N}(f) = E$ и замене спектра шума на элементе АР $g_n(f)$ на спектр шума на выходе сумматора компенсатора $g_n(f) M^2/K(f)$.

Полученный результат согласуется с оценкой помехоустойчивости СПВО, имеющей традиционное УФХН с единичным амплитудным распределением и скалярным послесумматорным фильтром, оптимизированным путем использования спектров сигнала и шума на выходе сумматора УФХН — входе фильтра [см. (2.2.33)]. В таком случае выходное отношение с/ш определяется выражением (2.2.34). Если $L \gg \lambda$, то в соответствии с (2.2.48) эрмитова форма $L_s^T(f) \mathcal{N}(f) L_s(f) = M^2/K(f)$, где $K(f) \approx 2Lf/c$, так что формула (2.2.34) совпадает с (2.6.33).

В работе [94] синтез оптимальной СПВО в частотно-волновой области и сравнительный анализ оптимальной и традиционной систем основаны на представлении реализации поля, описываемого его ПВКФ, с помощью разложения Корунена—Лозва. В работе [96] выполнен сравнительный анализ помехоустойчивости традиционной и оптимальной СПВО с линейной АР

в частотно-волновой области. Полученные выводы согласуются с основными результатами, изложенными в настоящем параграфе.

2.7. Задачи оценки параметров многомерных сигналов в системе пространственно-временной обработки

В гидроакустических системах [8, 9, 47] возникает необходимость оценки ряда параметров сигналов, связанных с координатами наблюдаемых объектов. Для некоторых из этих параметров (определяющих, например, угловое положение объекта) необходимо обрабатывать информацию с выходов элементов АР [9, 28, 95]. Кроме того, в СПВО возникают задачи оценки пространственных характеристик (например, волновых спектров) [26, 32, 44, 47].

Основные положения методики оценки параметров многомерного сигнала. Ограничимся рассмотрением задачи оценки неслучайного параметра многомерного сигнала, реализуемой на основе использования функции правдоподобия (ФП) пространственно-временной выборки поля на элементах АР. Используем в качестве такой функции плотность распределения [см. (1.4.10)] M -мерных векторов Фурье-изображений $X(f_k)$ временных реализаций поля на выходе элементов АР.

Обозначим через θ неизвестный детерминированный параметр, связанный с многомерным сигналом; в таком случае можно считать, что формула (1.4.10) определяет условную плотность распределения $f(X|H_0, \theta) = L(\theta)$. Для последующего построения алгоритма оценки параметра θ необходимо найти производную функции $L(\theta)$ по параметру θ . Из (1.4.10) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = z(\theta) = & - \sum_{k=0}^{N/2} \text{tr} \left\{ G_x^{-1}(f_k, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} G_x(f_k, \theta) \right\} + \\ & + \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N/2} X^T(f_k) G_x^{-1}(f_k, \theta) \frac{\partial G_x(f_k, \theta)}{\partial \theta} G_x^{-1}(f_k, \theta) \bar{X}(f_k). \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Здесь первый член получен на основе применения преобразования подобия эрмитовой матрицы G_x [см. (3.1.39)], т. е. $G_x = F \Lambda \bar{F}^{-1}$. Тогда, используя равенство $\det G_x = \det \Lambda$, находим, что $\partial(\ln \det G_x) / \partial \theta = \text{tr} \{ \Lambda^{-1} \partial \Lambda / \partial \theta \} = \text{tr} \{ \bar{F}^{-1} G_x^{-1} F \partial (F^{-1} G_x \bar{F}) / \partial \theta \} = \text{tr} \{ G_x^{-1} \partial G_x / \partial \theta \}$. Второй член получен на основе применения тождества $\partial (G_x^{-1} G_x) / \partial \theta = \partial (E) / \partial \theta = 0$, откуда следует, что $\partial G_x^{-1} / \partial \theta = -G_x^{-1} (\partial G_x / \partial \theta) G_x^{-1}$.

В выражении (2.7.1) от сумм целесообразно перейти к интегралам, подобно тому, как это было сделано при получении формулы (2.1.2):

$$\begin{aligned} z(\theta) \approx & - \frac{T}{2} \int_{-f_B}^{f_B} \text{tr} \left\{ G_x^{-1}(f, \theta) \frac{\partial G_x(f, \theta)}{\partial \theta} \right\} df + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-f_B}^{f_B} X^T(f) G_x^{-1}(f, \theta) \frac{\partial G_x(f, \theta)}{\partial \theta} G_x^{-1}(f, \theta) \bar{X}(f) df. \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Будем далее рассматривать максимально правдоподобную оценку параметра θ , полученную из уравнения максимального правдоподобия. Практический способ его решения [40, 42] основан на разложении функции $\ln L(\theta)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторой фиксированной точки θ_Φ , находящейся вблизи максимума этой функции (полагаем, что отношение с/ш достаточно велико). Сохранение первых трех членов ряда отвечает параболической аппроксимации $\ln L(\theta)$ вблизи точки $\theta = \theta_\Phi$. После преобразования получим следующую оценку $\hat{\theta}$ параметра θ :

$$\hat{\theta} = \theta_\Phi - \frac{\partial \ln L(\theta) / \partial \theta |_{\theta = \theta_\Phi}}{\partial^2 \ln L(\theta) / \partial \theta^2 |_{\theta = \theta_\Phi}},$$

смысл которой иллюстрируется рис. 2.25. Таким образом, этот алгоритм отвечает [40] оценке параметра θ с помощью оптимального дискриминатора, осуществляющего измерение первой и второй производных $\ln L(\theta)$ в точке θ_Φ и сравнение их отношения с величиной θ_Φ . Если измеренный параметр энергетический, а отношение с/ш достаточно велико [70], то дисперсия величины $\partial^2 \ln L(\theta) / \partial \theta^2$ мала по сравнению с ее средним значением, а поэтому [42] можно принять $\partial^2 \ln L(\theta) / \partial \theta^2 \approx M \{ \partial^2 \ln L(\theta) / \partial \theta^2 \}$. В результате алгоритм оценки становится таким:

$$\hat{\theta} = \theta_\Phi - \frac{z(\theta_\Phi)}{M \{ \dot{z}(\theta_\Phi) \}}, \quad (2.7.3)$$

где использовано обозначение из формулы (2.7.1), а $\dot{z}(\theta_\Phi) = \partial z(\theta) / \partial \theta |_{\theta = \theta_\Phi}$. Заметим, что величина $M \{ \dot{z}(\theta_\Phi) \}$ имеет здесь смысл крутизны дискриминационной характеристики $z(\theta)$ в точке $\theta = \theta_\Phi$. Если время наблюдения T велико по сравнению с интервалом корреляции входного процесса $\tau_{\text{кор}}$, то можно принять, что величина $z(\theta)$ имеет нормальное распределение, а поэтому вероятностные характеристики оценки $\hat{\theta}$ определяются первыми двумя моментами, следующими из выражения (2.7.3):

$$\begin{aligned} M \{ \hat{\theta} \} & = \\ & = \theta_\Phi - M \{ z(\theta_\Phi) \} / M \{ \dot{z}(\theta_\Phi) \}; \end{aligned}$$

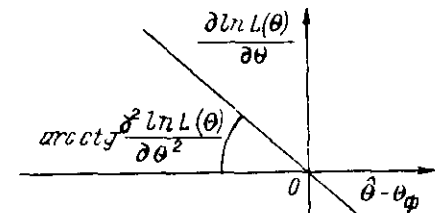


Рис. 2.25

$$D\{\hat{\theta}\} = M\{[\hat{\theta} - M\{\hat{\theta}\}]^2\} = D\{z(\theta_\phi)\} / [M\{\dot{z}(\theta_\phi)\}]^2.$$

Найдем величины, входящие в эти формулы. Так как $M\{\bar{X}(f)X^T(f)\} = TG_x(\theta_0)$ где θ_0 — истинное значение θ , то из равенства (2.7.2) получаем

$$M\{z(\theta_\phi)\} = \frac{T}{2} \int_{-f_B}^{f_B} \text{tr} \left\{ G_x^{-1}(f, \theta_\phi) \frac{\partial G_x(f, \theta_\phi)}{\partial \theta} \times \right. \\ \left. \times [G_x^{-1}(f, \theta_\phi) G_x(f, \theta_0) - E] \right\} df; \quad (2.7.4)$$

$$M\{\dot{z}(\theta_\phi)\} = \frac{T}{2} \int_{-f_B}^{f_B} \text{tr} \left\{ \left[G_x^{-1}(f, \theta_\phi) \frac{\partial^2 G_x(f, \theta_\phi)}{\partial \theta^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(G_x^{-1}(f, \theta_\phi) \frac{\partial G_x(f, \theta_\phi)}{\partial \theta} \right)^2 \right] [G_x^{-1}(f, \theta_\phi) G_x(f, \theta_0) - E] - \right. \\ \left. - \left[G_x^{-1}(f, \theta_\phi) \frac{\partial G_x(f, \theta_\phi)}{\partial \theta} \right]^2 G_x^{-1}(f, \theta_\phi) G_x(f, \theta_0) \right\} df. \quad (2.7.5)$$

Если $\theta_\phi = \theta_0$, то $M\{z(\theta_0)\} = 0$ и $M\{\hat{\theta}\} = \theta_0$ (оценка несмещенная), а величина

$$M\{\dot{z}(\theta_0)\} = -\frac{T}{2} \int_{-f_B}^{f_B} \text{tr} \left\{ \left[G_x^{-1}(f, \theta_0) \frac{\partial G_x(f, \theta_0)}{\partial \theta} \right]^2 \right\} df = -I(\theta_0), \quad (2.7.6)$$

где $I(\theta_0)$ — информация по Фишеру [42], определяющая при $\theta = \theta_0$ нижнюю границу дисперсии (НГД) оценки. Остается найти выражение для $D\{z(\theta_\phi)\} = M\{z^2(\theta_\phi)\} - [M\{z(\theta_\phi)\}]^2$. Для этого целесообразно воспользоваться выражением (2.7.1), рассмотреть величину $z(f_k, \theta)$ для фиксированной частоты f_k и найти ее дисперсию $D\{z(f_k, \theta_\phi)\}$. Так как при $T \gg \tau_{\text{кор}}$ векторы $X(f_k)$ для несовпадающих частот практически некоррелированы, то сумма дисперсий $D\{z(f_k, \theta_\phi)\}$ дает дисперсию $D\{z(\theta_\phi)\}$. Из (2.7.1) следует выражение

$$M\{z^2(f_k, \theta_\phi)\} = M \left\{ \left[-\text{tr} \left(G_x^{-1}(f_k, \theta_\phi) \frac{\partial G_x(f_k, \theta_\phi)}{\partial \theta} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{T} X^T(f_k) G_x^{-1}(f_k, \theta_\phi) \frac{\partial G_x(f_k, \theta_\phi)}{\partial \theta} G_x^{-1}(f_k, \theta_\phi) \bar{X}(f_k) \right]^2 \right\} = \\ = \text{tr}^2 \left\{ G_x^{-1}(f_k, \theta_\phi) \frac{\partial G_x(f_k, \theta_\phi)}{\partial \theta} [G_x^{-1}(f_k, \theta_\phi) G_x(f_k, \theta_0) - E] \right\} + \\ + \text{tr} \left\{ \left[G_x^{-1}(f_k, \theta_\phi) \frac{\partial G_x(f_k, \theta_\phi)}{\partial \theta} G_x^{-1}(f_k, \theta_\phi) G_x(f_k, \theta_0) \right]^2 \right\}, \quad (2.7.7)$$

полученное с использованием равенства

$$\frac{1}{T^2} M \{ [X^T(f)A(f)\bar{X}(f)]^2 \} = \text{tr}^2 \{ A(f)G_x(f, \theta_0) \} + \\ + \text{tr} \{ [A(f)G_x(f, \theta_0)]^2 \},$$

где $A(f)$ — некоторая эрмитова матрица. При выводе этого равенства учтена формула для $M\{\bar{X}_m(f_1)X_n(f_1)\bar{X}_k(f_2)X_l(f_2)\}$, приведенная в разд. 2.1 при анализе (2.1.62). Используя выражение для $M\{z(f_k, \theta_\phi)\}$ [см. (2.7.4)], определим дисперсию $D\{z(f_k, \theta_\phi)\}$. Далее после суммирования по всем частотам и перехода к непрерывной частоте окончательно получаем

$$D\{z(\theta_\phi)\} = \frac{T}{2} \int_{-f_B}^{f_B} \text{tr} \left\{ \left[G_x^{-1}(f, \theta_\phi) \frac{\partial G_x^{-1}(f, \theta_\phi)}{\partial \theta} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times G_x^{-1}(f, \theta_\phi) G_x(f, \theta_0) \right]^2 \right\} df. \quad (2.7.8)$$

Если $\theta_\phi = \theta_0$, то, как видно из формулы (2.7.6), $D\{z(\theta_0)\} = I(\theta_0)$ и оценка $\hat{\theta}$ [см. (2.7.3)] является эффективной, при этом ее точностные характеристики

$$M\{\hat{\theta}\} = \theta_0, \\ D\{\hat{\theta}\} = \left(\frac{T}{2} \int_{-f_B}^{f_B} \text{tr} \left\{ \left[G_x^{-1}(f, \theta_0) \frac{\partial G_x(f, \theta_0)}{\partial \theta} \right]^2 \right\} df \right)^{-1}. \quad (2.7.9)$$

Из сравнения выражений (2.7.5) и (2.7.7) видно, что при $\theta_\phi \neq \theta_0$

$$M\{[\partial^2 \ln L(\theta)/\partial \theta^2]\}_{\theta=\theta_\phi} \neq -M\{[\partial \ln L(\theta)/\partial \theta]^2\}_{\theta=\theta_\phi};$$

равенство имеет место лишь при $\theta_\phi = \theta_0$. Приведенные выражения могут быть использованы для решения задач оценки параметра θ многомерного сигнала.

Оценка направления прихода плосковолнового сигнала. Эта задача исследовалась в работах [9, 28, 95] для случая некоррелированного по пространству поля шума и линейной АР. Приведенные выше общие выражения оценки параметра многомерного сигнала пригодны и для решения этой задачи.

Положим, что плоский волновой фронт сигнала образует неизвестный

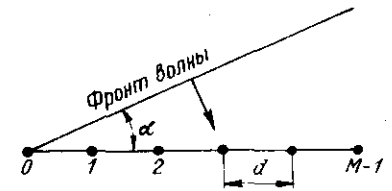


Рис. 2.26

угол α с линейной АР (рис. 2.26), имеющей M элементов, расположенных на расстоянии d . Матрицы ВСПМ сигнала и шума определяются выражением (2.1.3), где единичная временная задержка для сигнала $\delta = (d/c) \sin \theta$ и в случае некоррелированного поля шума $N(f) = E$. Таким образом $G_x(f, \alpha) = g_s(f) \bar{L}_s(f, \alpha) L_s^T(f, \alpha) + g_n(f) E$, где роль параметра θ играет угол α . Найдем выражения, входящие в формулу (2.7.2) для рассматриваемого случая. Так как от α зависит лишь сигнал, то нетрудно видеть, что производная

$$\frac{\partial G_x(f, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial G_s(f, \alpha)}{\partial \alpha} = g_s(f) \frac{\partial}{\partial \alpha} \bar{L}_s(f, \alpha) L_s^T(f, \alpha) = g_s(f) j \cdot 2\pi f (d/c) \cos \alpha \bar{V}_s(f) Q V_s(f) \quad (2.7.10)$$

где Q — матрица, где диагональная матрица $V_s(f)$ определяется формулой (2.1.15), а матрица Q образована разностью величин $m, n = 0, 1, \dots, M-1$ и имеет вид

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & \dots & 1-M \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 2-M \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 3-M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M-1 & M-2 & M-3 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.7.11)$$

т. е. m, n -й элемент матрицы Q равен $m - n$. Будем полагать, что входное отношение с/ш мало, а поэтому, как и при выводе формулы (2.1.8), примем $G_x^{-1} = (G_n + G_s)^{-1} \approx G_n^{-1} (E - G_s G_n^{-1}) \approx G_n^{-1} = (1/g_n) E$. Таким образом, для второго члена (2.7.2) получим

$$G_x^{-1}(f, \alpha) \frac{\partial G_x(f, \alpha)}{\partial \alpha} G_x^{-1}(f, \alpha) = \frac{g_s(f)}{g_n^2(f)} j \cdot 2\pi f (d/c) \cos \alpha \bar{V}_s(f) Q V_s(f). \quad (2.7.12)$$

Определим теперь выражение, входящее в первый член (2.7.2). Из формулы (2.7.10) и полученного выше выражения $G_x^{-1} \approx G_n^{-1} = (1/g_n) E$ видно, что

$$G_x^{-1}(f, \alpha) \frac{\partial G_x(f, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{g_s(f)}{g_n(f)} j \cdot 2\pi f (d/c) \cos \alpha \bar{V}_s(f) Q V_s(f). \quad (2.7.13)$$

Поэтому с точностью до скалярного множителя интересующая нас величина равна $\text{tr} \{ \bar{V}_s(f) Q V_s(f) \}$. В соответствии с известным свойством следа $\text{tr} \{ \bar{V}_s Q V_s \} = \text{tr} \{ Q V_s \bar{V}_s \} = \text{tr} \{ Q \} = 0$, так как $V_s \bar{V}_s = E$, а след матрицы Q равен нулю.

Таким образом, алгоритм обработки выходных напряжений $x_m(t)$ элементов АР, обеспечивающий оптимальную оценку угла α , в соответствии с формулой (2.7.2) и полученными результатами определяется выражением

$$z(\alpha) = \frac{d \cos \alpha}{2c} \int_{-f_B}^{f_B} \left[j \cdot 2\pi f \frac{\sqrt{g_s(f)}}{g_n(f)} X^T(f) \bar{V}_s(f) \right] \times \left[Q \frac{\sqrt{g_s(f)}}{g_n(f)} X^T(f) \bar{V}_s(f) \right]^T df. \quad (2.7.14)$$

Первый этап обработки сводится к вычислению вектора-строки $Y^T(f) = [\sqrt{g_s(f)/g_n(f)}] X^T(f) \bar{V}_s(f)$. Положим, что вектору $Y^T(f)$ во временной области отвечает вектор $\mathcal{Y}^T(t)$. В таком случае умножение изображения $Y^T(f)$ на $j \cdot 2\pi f$ соответствует дифференцированию вектора $\mathcal{Y}^T(t)$, т. е. вектору-строке $d\mathcal{Y}^T(t)/dt$. Таковы операции, определяемые выражением в первых квадратных скобках формулы (2.7.14). Как видно, во вторые скобки входит то же самое изображение $Y^T(f)$, а поэтому вектору-строке $Z^T(f) = Q Y^T(f)$ во временной области отвечает вектор-строка $Z^T(t) = Q \mathcal{Y}^T(t)$ с составляющими $z_m(t) = \sum_{n=0}^{M-1} (m-n) y_n(t)$, где $m = 0, 1, \dots, M-1$. Так как выражение во вторых скобках подынтегральной функции является изображением комплексно сопряженного вектора-столбца, то в соответствии с формулой Парсеваля из (2.7.14) находим

$$z(\alpha) = \frac{d \cos \alpha}{2c} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{d}{dt} [\mathcal{Y}^T(t)] Z(t) dt, \quad (2.7.15)$$

что и представляет собой оптимальный алгоритм обработки, определяющий оценку угла α во временной области [28]. Структурная схема алгоритма оптимальной оценки угла α , отвечающая алгоритмам (2.7.14) и (2.7.15), показана на рис. 2.27.

Если воспользоваться приближенным представлением производной функции правдоподобия по углу с помощью ее разности, то приходим

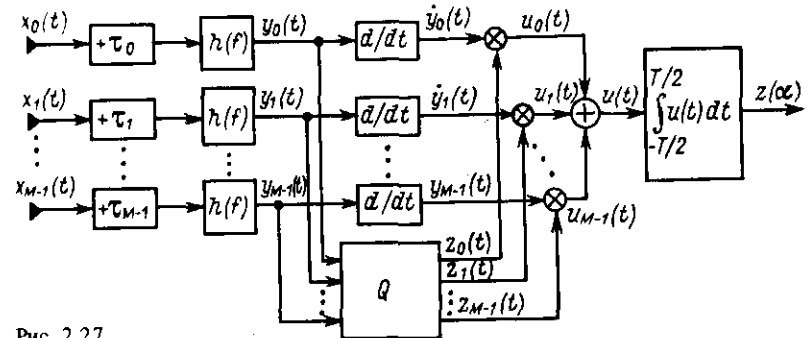


Рис. 2.27

к амплитудной схеме оценки угла [28], что применительно к формуле (2.7.2) означает

$$z(a) = \frac{\partial \ln L(a)}{\partial a} \approx \frac{\ln L(a + \Delta a) - \ln L(a - \Delta a)}{2\Delta a}$$

Так как характеристики поля шума от параметра a не зависят, можно воспользоваться отношением правдоподобия [см. (2.1.7)] соответственно для углов $a + \Delta a$ и $a - \Delta a$, которым отвечают векторы \bar{L}_{+s} (и $\bar{L}_{-s}(f_B)$) [см. (2.1.3)]:

$$z(a) \approx \frac{1}{2\Delta a} \left[\int_0^{f_B} |h(f)X^T(f)N^{-1}(f)\bar{L}_{+s}(f)|^2 df - \int_0^{f_B} |h(f)X^T(f)N^{-1}(f)\bar{L}_{-s}(f)|^2 df \right]$$

При малом Δa такой вариант системы также реализует процедуру оценки угла a , отвечающую максимуму правдоподобия.

Для завершения задачи оценки \hat{a} нужно найти ее дисперсию $D\{\hat{a}\}$, определяемую выражением (2.7.9), которое в соответствии с формулой (2.7.6) совпадает с ее нижней границей $1/I(a)$. В соответствии с формулами (2.7.9) и (2.7.13)

$$\text{tr} \left\{ G_x^{-1}(f, a) \frac{\partial G_x(f, a)}{\partial a} \right\}^2 = \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [j \cdot 2\pi f (d/c) \cos a]^2 \text{tr} \{ QQ \}$$

где учтено, что $\text{tr} \{ \bar{V}_s Q V_s \bar{V}_s Q V_s \} = \text{tr} \{ V_s Q Q V_s \} = \text{tr} \{ QQ \}$.

В соответствии с определением матрицы Q [см. (2.7.11)]

$$\text{tr} \{ QQ \} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} (m-n)(n-m) = -\frac{M^2(M^2-1)}{6}$$

Используя два последних выражения, из формулы (2.7.9) получаем

$$D\{\hat{a}\} = \left(\frac{c}{d \cos a_0} \right)^2 \frac{3}{2\pi^2 M^2 (M^2 - 1)} \left(T \int_{f_H}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} f^2 df \right)^{-1}, \quad (2.7.16)$$

что совпадает с НГД оценки, равной $1/I(a)$ [см. (2.7.6)].

Рассмотрим теперь двухканальную субоптимальную систему [95] оценки угла a прихода плосковолнового сигнала, изображенную на рис. 2.28. Выходы $y_1(t)$ и $y_2(t)$ сумматоров двух половин АР, скомпенсированной в направлении a_Φ , обрабатываются фильтрами с КЧХ $h(f)$. Далее в одном канале осуществляется дифференцирование и результат перемножения процессов $y_3(t)$ и $y_4(t)$ подвергается низкочастотной фильтрации. Выходной эффект z является функцией углов a и a_Φ , т. е.

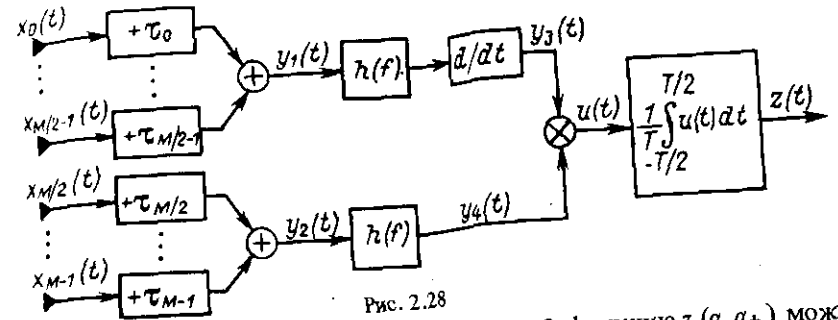


Рис. 2.28

$z(a, a_\Phi)$. Полагая, что разность углов $a_\Phi - a = \beta$, функцию $z(a, a_\Phi)$ можно линеаризовать в окрестности точки a_Φ , тогда, подобно (2.7.3), оценка \hat{a}_1 угла a

$$\hat{a}_1 = a_\Phi - \frac{z(a, a_\Phi)}{M \{ \partial z(a, a_\Phi) / \partial a \}}, \quad (2.7.17)$$

так как при $a = a_\Phi = a_0$ $z(a_0, a_0) \approx M \{ z(a_0, a_0) \} = 0$ (обозначение оценки \hat{a}_1 отличает ее от рассмотренной выше оптимальной оценки \hat{a}). В таком случае точностные характеристики оценки (2.7.17) угла a таковы:

$$M \{ \hat{a}_1 \} \Big|_{a_\Phi = a_0} = a_0;$$

$$D\{\hat{a}_1\} = \frac{D\{z(a, a_\Phi)\}}{[M \{ \partial z(a, a_\Phi) / \partial a \}]^2} \Big|_{a_\Phi = a_0} = \frac{\sigma_z^2}{(\partial z / \partial a)^2} \Big|_{a_\Phi = a_0}. \quad (2.7.18)$$

Определим эти характеристики для помехо-сигнальной ситуации, принятой в настоящем параграфе, и схемы обработки, показанной на рис. 2.28. Вероятностные характеристики процессов $y_i(t)$ будем отличать индексами $i = 1, 2, 3, 4$. Например, $r_{34}(\tau)$ есть взаимная корреляционная функция процессов $y_3(t)$ и $y_4(t)$, а $g_{34}(f)$ — их взаимная спектральная плотность. Звену дифференцирования d/dt в частотной области соответствует КЧХ $j \cdot 2\pi f$. В результате находим

$$\bar{z} = M \{ y_3(t) y_4(t) \} = r_{34}(0) = \int_{-f_B}^{f_B} g_{34}(f) df = \int_{-f_B}^{f_B} (-j \cdot 2\pi f) h^2(f) g_{12}(f) df = 4\pi \int_0^{f_B} f h^2(f) \text{Im} \{ g_{12}(f) \} df. \quad (2.7.19)$$

Так как шум по пространству не коррелирован, то взаимный спектр $g_{12}(f)$ определяется взаимным спектром сигнала на выходах сумматоров половин АР, т. е. в точках, находящихся на расстоянии $Md/2$, что отвечает временной задержке $(Md/2c)(\sin a_0 - \sin a_\Phi)$, и поэтому

$$g_{12}(f) = g_s(f) \exp \left\{ -j \cdot 2\pi f (Md/2c) (\sin \alpha_0 - \sin \alpha_\Phi) \right\} \left[\frac{\sin \pi f [Md (\sin \alpha_\Phi - \sin \alpha_0)/2c]}{\sin \pi f [d (\sin \alpha_\Phi - \sin \alpha_0)/2c]} \right], \quad (2.7.20)$$

Отсюда следует, что при $\alpha_\Phi = \alpha_0$, т. е. $\beta = 0$,

$$g_{12}(f) \Big|_{\alpha_\Phi = \alpha_0} = g_s(f) \frac{M^2}{4};$$

$$\frac{\partial \operatorname{Im} \{g_{12}(f)\}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_\Phi = \alpha_0} = g_s(f) \frac{d \cos \alpha_0}{c} \pi f \frac{M^3}{4}. \quad (2.7.21)$$

Из выражений (2.7.19) и (2.7.21) видно, что при $\alpha_\Phi = \alpha_0$ величина $\bar{z} = 0$ а производная

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_\Phi = \alpha_0} = \pi^2 \frac{d \cos \alpha_0}{c} M^3 \int_0^{f_B} g_s(f) h^2(f) f^2 df. \quad (2.7.22)$$

Определим теперь величину дисперсии σ_z^2 . Полагая, что постоянная времени НЧФ T много больше интервала корреляции входного процесса (или $Tf_B \gg 1$) получим

$$\sigma_z^2 = (1/T) g_u(0) = 1/T \int_{-f_B}^{f_B} [g_3(f) \bar{g}_4(f) + g_{34}(f) \bar{g}_{43}(f)] df. \quad (2.7.23)$$

Так как $g_3(f) = 4\pi^2 f^2 h^2(f) g_1(f)$, $g_4(f) = h^2(f) g_2(f)$ и $g_{34}(f) = \bar{g}_{43}(f) = -j \cdot 2\pi f h^2(f) g_{12}(f)$, то находим

$$\sigma_z^2 = (8\pi^2/T) \int_0^{f_B} h^4(f) [g_1(f) g_2(f) - g_{12}^2(f)] f^2 df.$$

При $\beta = 0$ спектры $g_1(f) = g_2(f) = M^2 g_s(f)/4 + M g_n(f)/2$, спектр $g_{12}(f)$ определяется формулой (2.7.21). Полагая, что входное отношение $c/\text{ш}$ мало, т. е. $g_s(f) \ll g_n(f)$, получаем

$$\sigma_z^2 = 2\pi^2 M^2 (1/T) \int_0^{f_B} h^4(f) g_n^2(f) f^2 df. \quad (2.7.24)$$

Таким образом, подставив выражения (2.7.22) и (2.7.24) в формулу (2.7.18), имеем

$$D \{\hat{\alpha}_1\} = \left(\frac{c}{d \cos \alpha_0} \right)^2 \frac{2}{\pi^2 M^4 T} \frac{\int_0^{f_B} h^4(f) g_n^2(f) f^2 df}{\left(\int_0^{f_B} h^2(f) g_s(f) f^2 df \right)^2}. \quad (2.7.25)$$

Минимум $D \{\hat{\alpha}_1\}$ находится путем оптимизации отношения (2.7.25), подобно тому, как это было сделано применительно к выражению (2.2.37), и имеет место при $h(f) = \sqrt{g_s(f)/g_n(f)}$. В таком случае из выражения (2.7.25) получаем

$$D \{\hat{\alpha}_1\} = \left(\frac{c}{d \cos \alpha_0} \right)^2 \frac{2}{\pi^2 M^4} \left(T \int_{f_n}^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} f^2 df \right)^{-1}. \quad (2.7.26)$$

Выше было получено выражение (2.7.16) для НГД оценки угла α , поэтому можно определить относительную эффективность оценки (2.7.26), взяв их отношение

$$\eta = \frac{D \{\hat{\alpha}_1\}}{D \{\hat{\alpha}\}} = \frac{4}{3} [1 - (1/M^2)]. \quad (2.7.27)$$

Отсюда следует, что при $M \gg 1$ отношение $\eta \approx 4/3$, т. е. дисперсия оценки угла α с помощью рассмотренной субоптимальной системы (см. рис. 2.28), лишь на 25 % хуже НГД. Если $M = 2$, то $\eta = 1$, т. е. субоптимальная система с двумя элементами превращается в оптимальную. Такой результат не случаен. Действительно, нетрудно показать, что при $M = 2$ схема, представленная на рис. 2.27, может быть преобразована в изображенную схему, на рис. 2.28.

Таким образом, при измерении угла α прихода плосковолнового сигнала возникает флуктуационная ошибка измерения угла $\alpha_{\text{фл}}$. Сама эта ошибка $\alpha_{\text{фл}}$ определяется флуктуационной составляющей выходного эффекта углового дискриминатора $z_{\text{фл}}$. В соответствии с формулой (2.7.17) они связаны между собой зависимостью $z_{\text{фл}} = (dz/d\alpha) \alpha_{\text{фл}}$. Заметим, что уровень спектральной плотности флуктуаций, воздействующих на вход НЧФ дискриминатора [процесс $u(t)$ при условии $T_{\text{НЧФ}} \gg \tau_{\text{кор}}$ можно рассматривать как белый шум], в соответствии с формулами (2.7.23) и (2.7.24) определяется выражением

$$g_u(0) = 2\pi^2 M^2 \int_0^{f_B} [g_s^2(f)/g_n^2(f)] f^2 df. \quad (2.7.28)$$

Определение угловых координат источников излучения на основе методов многомерного спектрального анализа. Такой подход в последнее время развивается в ряде работ [26, 32, 44, 47], где задача оценки угловых координат решается на основе спектрального анализа поля источников излучения, выполняемого с помощью пространственного преобразования Фурье.

Содержание указанных методов удобно рассмотреть на основе уже приведенного материала. Для простоты изложения и его конкретизации рассмотрим линейную АР с M элементами, снабженную устройством компенсации, описываемым матрицей КЧХ [см. (2.1.15)] $V_s(f)$, и имеющую амплитудно-фазовое распределение, описываемое M -мерным вектором $A(f)$ (рис. 2.29). Изображение процесса на выходе сумматора рассматриваемой антенной системы $U(f) = X^T(f) V_s(f) A(f)$. Отсюда следует, что

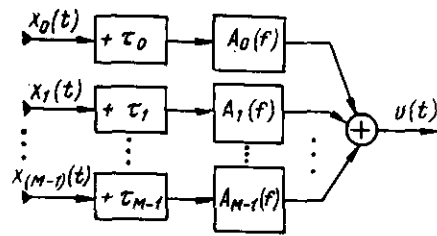


Рис. 2.29

$$= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} \bar{A}_m(f) A_n(f) g_{mn}(f) e^{-j \cdot 2\pi \varphi_s d (m-n)}, \quad (2.7.29)$$

где $\varphi_s = (f/c) \sin \alpha_s$, а длина антенны $L = Md$. В соответствии с формулой (1.3.7) выразим взаимную спектральную плотность $g_{mn}(f)$ через частотно-волновой спектр поля $\Phi(f, \varphi)$:

$$g_{mn}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f, \varphi) e^{-j \cdot 2\pi d (m-n) \varphi} d\varphi,$$

где φ — проекция пространственной частоты на ось ОУ, вдоль которой расположена АР. В результате из формулы (2.7.29) находим

$$\Phi_L(f, \varphi_s) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f, \varphi) |B(f, \varphi_s, \varphi)|^2 d\varphi, \quad (2.7.30)$$

где

$$B(f, \varphi_s, \varphi) = \sum_{m=0}^{M-1} A_m(f) e^{-j \cdot 2\pi d (\varphi - \varphi_s) m} \quad (2.7.31)$$

— пространственное спектральное окно, реализуемое АР, компенсированной в направлении α_s , и имеющее амплитудно-фазовое распределение $A_m(f)$. Функция $B(f, \varphi_s, \varphi)$ есть результат пространственного преобразования Фурье КЧХ элементарных каналов, а $\Phi_L(f, \varphi_s)$ — ЧВС поля, измеренный на частотах — временной f и пространственной $\varphi_s = (f/c) \sin \alpha_s$ — с помощью спектрального окна $B(f, \varphi_s, \varphi)$ [ср. с (2.6.22)].

В случае равномерного амплитудного распределения, когда $A_m(f) = 1/M$, выражение (2.7.31) принимает вид

$$B(f, \varphi, \varphi_s) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \exp[-j \cdot 2\pi f d (\varphi - \varphi_s) m] \quad (2.7.32)$$

и определяет ХН линейной АР, причем при $\varphi = \varphi_s$ $B(f, \varphi_s, \varphi_s) = 1$. Таким образом, в случае традиционной системы и $A_m(f) = 1/M$, из формулы (2.7.30) следует, что

$$\Phi_{\text{ТР}}(f, \varphi_s) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f, \varphi) \left| \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j \cdot 2\pi f d (\varphi - \varphi_s) m} \right|^2 d\varphi. \quad (2.7.33)$$

для поля, заданного матрицей ВСПМ $G_x(f)$ на элементах АР, его мощность на частоте f , измеряемая такой системой с антенной длиной L , определяется выражением

$$\Phi_L(f, \varphi_s) = \bar{A}^T(f) V_s(f) G_x(f) \bar{V}_s(f) A(f) =$$

Рассмотрим простейший случай, когда на вход АР воздействует плосковолновый сигнал, приходящий с направления α [т. е. $\varphi_a = (f/c) \sin \alpha$], и изотропный шум, некоррелированный на элементах АР, т. е. $d = c/2f$. Это отвечает матрице ВСПМ суммарного поля $G_x(f) = g_s(f) \bar{L}_a(f) L_a^T(f) + g_n(f) E$, и в таком случае $\Phi(f, \varphi) = \Phi_s(f, \varphi) + \Phi_n(f, \varphi)$, где в соответствии с (1.5.13) и (1.5.24)

$$\Phi_s(f, \varphi) = g_s(f) \delta(\varphi - \varphi_a);$$

$$\Phi_n(f, \varphi) = \begin{cases} g_n''(f) d & \text{при } |\varphi| \leq f/c; \\ 0 & \text{при } |\varphi| > f/c. \end{cases} \quad (2.7.34)$$

Подставив эти выражения в формулу (2.7.33), находим

$$\Phi_{\text{ТР}}(f, \varphi_s) = g_s(f) R_{as}^2(f) + (1/M) g_n(f), \quad (2.7.35)$$

где $R_{as}^2(f)$ — квадрат ХН, определяемый по формуле, подобной формуле (2.3.16), где $\delta_s = 0$, $\delta_a = (d/c) \sin \alpha$ [при выводе (2.7.35) использовано то же выражение, что и для (1.4.21)]. Далее будем рассматривать мощность $\Phi_{\text{ТР}}(f, \varphi_s)$, нормированную к ее величине при $\alpha = \alpha_s$, т. е.

$$\tilde{\Phi}_{\text{ТР}}(f, \varphi_s) = \frac{g_s(f) M R_{as}^2(f) + g_n(f)}{g_s(f) M + g_n(f)} \quad (2.7.36)$$

В работе [32] предложен способ нахождения вектора $A(f)$, существенно улучшающего пространственное разрешение АР, достигаемое путем обужения ХН (такой способ часто ошибочно называют способом максимального правдоподобия [26, 31]). Суть этого способа такова: обозначим векторную КЧХ антенной системы $\bar{V}_s(f) A(f)$ (см. рис 2.29) через $D(f)$. Найдем вектор $D_0(f)$, который бы для поля, определяемого матрицей ВСПМ $G_x(f)$, обеспечивал минимум мощности на выходе системы, т. е. $\min D^T(f) G_x(f) D(f)$ [ср. с (2.7.29)] при выполнении условия $L_s^T(f) D(f) = 1$. Смысл сформулированной задачи в том, что пространственный фильтр с КЧХ $D(f)$ должен без искажения пропускать плоскую волну, приходящую с направления α_s [определяемого вектором $L_s(f)$], и подавлять наилучшим образом [min по всем $D(f)$] волны, приходящие с других направлений. Такая задача для более сложного случая (полосы частот) рассмотрена в разд. 3.2. В данном случае (для фиксированной частоты f) КЧХ $D_0(f)$ также определяется правой частью полученного ниже выражения (3.2.3) при $b(f) = 1$. Так как $D(f) = \bar{V}_s(f) A(f)$, то отсюда вектор оптимального амплитудно-фазового распределения

$$A(f) = \frac{V_s(f) G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f)}{L_s^T(f) G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f)}. \quad (2.7.37)$$

Обозначим через $g_{mn}(f)$ элементы матрицы $Q_x(f) = G_x^{-1}(f)$. Из формулы (2.7.37) находим

$$A_m(f) = \frac{\sum_{n=0}^{M-1} q_{mn}(f) e^{-j \cdot 2\pi d \varphi_s (m-n)}}{\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} q_{mn}(f) e^{-j \cdot 2\pi d \varphi_s (m-n)}} \quad (2.7.38)$$

Подставив это выражение в формулу (2.7.31), получаем

$$B(f, \varphi_s, \varphi) = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} q_{mn}(f) e^{-j \cdot 2\pi d (\varphi m - \varphi_s n)}}{\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} q_{mn}(f) e^{-j \cdot 2\pi d \varphi_s (m-n)}} \quad (2.7.39)$$

Это выражение описывает спектральное пространственное окно, которое получается в случае использования распределения (2.7.37), причем при $\varphi = \varphi_s$ $B(f, \varphi_s, \varphi_s) = 1$.

Подставив в формулу (2.7.30) выражение для спектрального окна $B(f, \varphi, \varphi_s)$ [см. (2.7.39)] и ЧВС $\Phi_s(f, \varphi) + \Phi_n(f, \varphi)$ [см. (2.7.34)] находим ЧВС данного аддитивного поля, измеренного антенной системой (см. рис. 2.29), при использовании в ней распределения $A(f)$ (2.7.37), обеспечивающего высокое разрешение:

$$\begin{aligned} \Phi_{в.р}(f, \varphi_s) &= g_s(f) \frac{\left| \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} q_{mn}(f) e^{-j \cdot 2\pi d (\varphi_a m - \varphi_s n)} \right|^2}{\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} q_{mn}(f) e^{-j \cdot 2\pi d \varphi_s (m-n)}} + \\ &+ g_n(f) \frac{\left| \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} q_{mn}(f) e^{-j \cdot 2\pi d \varphi_x (m-n)} \right|^2}{\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} q_{mn}(f) e^{-j \cdot 2\pi d \varphi_s (m-n)}} = \\ &= g_s(f) \frac{|L_a^T(f) G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f)|^2}{[L_s^T(f) G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2} + g_n(f) \frac{L_s^T(f) G_x^{-2}(f) \bar{L}_s(f)}{[L_s^T(f) G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2} \end{aligned} \quad (2.7.40)$$

С учетом формулы (2.7.37) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{в.р}(f, \varphi_s) &= \bar{A}^T(f) V_s(f) [g_s(f) \bar{L}_a(f) L_a^T(f) + g_n(f) E] \bar{V}_s(f) A(f) = \\ &= \bar{A}^T(f) V_s(f) G_x(f) \bar{V}_s(f) A(f) = 1/L_s^T(f) G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f). \end{aligned} \quad (2.7.41)$$

Воспользовавшись для обращения матрицы $G_x(f)$ тождеством (2.1.5), из выражения (2.7.41) находим

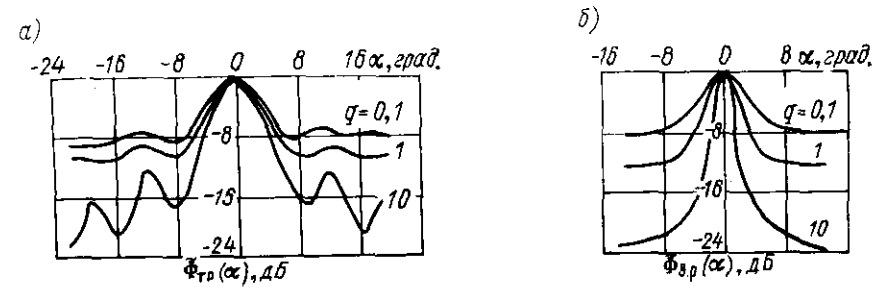


Рис. 2.30

$$\Phi_{в.р}(f, \varphi_s) = \frac{g_n(f) [g_n(f) + g_s(f) M]}{M [g_n(f) + g_s(f) M] - g_s(f) M^2 R_{as}^2(f)}. \quad (2.7.42)$$

После нормирования мощности $\Phi_{в.р}(f, \varphi)$ к ее величине при $\alpha = \alpha_s$ получаем

$$\tilde{\Phi}_{в.р}(f, \varphi_s) = g_n(f) / [g_n(f) + g_s(f) M [1 - R_{as}^2(f)]]. \quad (2.7.43)$$

Если теперь построить зависимости $\tilde{\Phi}_{т.р}(\alpha)$ (2.7.36) и $\tilde{\Phi}_{в.р}(\alpha)$ (2.7.43) в функции угла прихода плоской волны α , то можно убедиться в том, что алгоритм высокого разрешения отвечает своему названию. На рис. 2.30 приведены результаты такого расчета для межэлементного расстояния $d = c/2f$, т. е. зависимости $R_{as}(f) = \sin[(\pi M \sin \alpha)/2] / \sin[(\pi \sin \alpha)/2]$ для $M = 16$ и $q = g_s(f)/g_n(f) = 0,1; 1; 10$. Видно, что для алгоритма высокого разрешения (2.7.43) характеристика разрешения существенно зависит от отношения $c/\lambda g_s(f)/g_n(f)$.

В заключение рассмотрим кратко характеристики углового разрешения, обеспечиваемые оптимальной СПВО с векторной КЧХ многомерного фильтра, определяемой выражением (2.1.39): $H(f) = G_n^{-1}(f) \bar{L}_s(f)$, где $G_n(f)$ – матрица ВСПМ поля шума. В этом случае мощность поля, описываемого на входе АР матрицей ВСПМ $G_x(f)$ и измеряемого на выходе оптимальной СПВО,

$$\Phi_{опт}(f, \varphi_s) = L_s^T(f) G_n^{-1}(f) G_x(f) G_n^{-1}(f) \bar{L}_s(f). \quad (2.7.44)$$

Определим мощность для рассматриваемого поля на входе АР – плоской волны, приходящей с направления α , и некоррелированного на элементах АР поля изотропного шума. Из выражения (2.7.44) находим, что величина мощности $\Phi_{опт}(f, \varphi_s)$ определяется, так же как и для традиционной системы, выражением (2.7.35). Это и понятно, так как шум на элементах АР не коррелирован.

Ниже в разд. 3.3 рассматриваются особенности функционирования оптимальной СПВО в реальных условиях, когда обучение адаптивной СПВО осуществляется при наличии не только шума, но и сигнала. В таком случае КЧХ многомерного фильтра системы определяется вместо матрицы $G_n^{-1}(f)$ матрицей $G_x^{-1}(f)$, а поэтому из выражения (2.7.44) следует, что

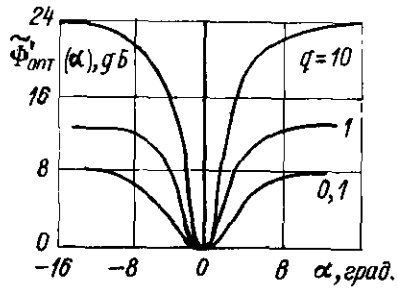


Рис. 2.31

$$\Phi'_{\text{опт}}(f, \varphi_s) = L_s^T(f) G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f). \quad (2.7.45)$$

Из сравнения формул (2.7.41) и (2.7.45) видно, что величина мощности $\Phi'_{\text{опт}}(f, \varphi_s)$ обратна $\Phi_{\text{в.р}}(f; \varphi_s)$. Поэтому оптимальная СПВО сохраняет высокое разрешение, лишь кривая нормированной мощности $\bar{\Phi}'_{\text{опт}}(\alpha)$ будет обратной кривой $\bar{\Phi}_{\text{в.р}}(\alpha)$, как это показано на рис. 2.31 (график на этом рисунке обратный по отношению к графику на рис. 2.30, б).

Система с распределением [см. (2.7.37)] может быть реализована несколькими способами: на основе алгоритма (2.7.29) [32], где взаимные спектры $g_{mn}(f)$ находятся путем их оценки $\hat{g}_{mn}(f)$, определяемой с помощью выборочного взаимного спектра [см. (1.1.8)]; на основе алгоритма Фроста, используемого в адаптивной СПВО [89] (см. разд.3.2).

Рассмотрим кратко существо метода углового разрешения, основанного на использовании собственных векторов матрицы ВСПМ, соответствующих ее минимальным собственным числам [85]. Положим, что M -элементная линейная АР расположена в поле r точечных источников излучения, находящихся на направлениях, определяемых углами $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, r$, и изотропного некоррелированного шума, матрица ВСПМ которого выражается формулой, аналогичной (2.3.48),

$$G_x(f) = \bar{\Lambda}(f) P(f) \Lambda^T(f) + g_n(f) E, \quad (2.7.46)$$

где $\Lambda(f)$ — $M \times r$ -матрица, образованная r векторами $L_i(f)$, т. е. $\Lambda(f) = [L_1(f), L_2(f), \dots, L_r(f)]$, а векторы волновых фронтов источников $L_i(f)$ определяются формулой (1.5.10) для углов α_i ; $P(f)$ — диагональная $r \times r$ -матрица, элементами которой являются спектральные плотности источников излучения $g_i(f)$ в точке приема.

Положим, что $r \leq M-1$, и определим собственные величины и соответствующие им собственные векторы матрицы G_x . По определению собственными величинами являются решения уравнения

$$\det \{ G_x - \lambda E \} = \det \{ \bar{\Lambda} P \Lambda^T + g_n E - \lambda E \} = 0, \quad (2.7.47)$$

которое можно переписать в виде

$$\det \{ \bar{\Lambda} P \Lambda^T - (\lambda - g_n) E \} = 0. \quad (2.7.48)$$

Так как $M \times M$ — матрица $\bar{\Lambda} P \Lambda^T$ образована суммой r матриц каждая с рангом, равным единице [см. (2.3.45)], то ее ранг не превосходит величины r . Поэтому матрица $\bar{\Lambda} P \Lambda^T$ кроме ненулевых имеет также нулевые собственные числа. Обозначим i -е ненулевое собственное число матрицы $\bar{\Lambda} P \Lambda^T$ через d_i . В таком случае из выражений (2.7.47) и (2.7.48) следует, что собственное число матрицы G_x есть $\lambda_i = d_i + g_n$. Если же рассматривается

i -е нулевое собственное число матрицы $\bar{\Lambda} P \Lambda^T$, то аналогично находим, что соответствующее собственное число матрицы G_x есть $\lambda_i = g_n$ (величина кратности этого корня не меньше, чем $M-r$ [41]).

Обозначим через $B(f)$ нормированный собственный вектор, отвечающий одному из минимальных собственных чисел $\lambda_i = g_n$, т. е. $B^T G_x B = g_n$ и $B^T B = 1$. Тогда из равенства (2.7.46) следует, что $B^T G_x B = B^T \bar{\Lambda} P \Lambda^T B + g_n B^T B$, а следовательно, и $B^T \bar{\Lambda} P \Lambda^T B = 0$. Так как входящая в последнее равенство матрица P положительно определенная, то это равенство удовлетворяется лишь в случае, если вектор $B^T \bar{\Lambda} = 0$, что означает

$$B^T \bar{\Lambda} = B^T [\bar{L}_1, \bar{L}_2, \dots, \bar{L}_r] = 0 \text{ или } B^T \bar{L}_i = 0, i = 1, 2, \dots, r. \quad (2.7.49)$$

Определим ХН антенной решетки, взяв в качестве вектора амплитудно-фазовых распределений вектор $B(f)$, отвечающий минимальному собственному числу. Это означает, что необходимо вычислить скалярное произведение $B^T(f) \bar{L}(a, f) = D(a, f)$ как функцию текущего угла a . Из выражения (2.7.49) следует, что при $a = \alpha_i$ [это означает $L(\alpha_i, f) = L_i(f)$] имеем $D(\alpha_i, f) = 0$, т. е. ХН с распределением $B(f)$, являющимся собственным вектором, соответствующим минимальному собственному значению матрицы ВСПМ $G_x(f)$ [см. (2.7.46)] поля, образованного источниками точечного излучения и некоррелированным изотропным шумом, имеет „нулевые проколы“ в направлении на точечные источники, и тем самым определяет их угловое положение.

В работе [85] исследован простой пример для двух источников, коррелированных между собой, где использован рассмотренный выше в настоящем пункте алгоритм обеспечения минимума мощности на выходе сумматора многомерного фильтра $\bar{D}^T(f) G_x(f) D(f)$ при условии удовлетворения ограничения $L_1^T(f) D(f) = 1$ для одного из источников [см. вывод формулы (2.7.37)]. В результате корреляции источников возникает подавление сигнала от одного источника (первого, ориентированного вектором L_1), пропорциональное величине коэффициента корреляции.

Если направление прихода волны от второго источника излучения известно (известен вектор ориентации его волнового фронта L_2), то введение при синтезе второго, дополнительного ограничения $L_2^T(f) D(f) = 0$ позволяет определить оптимальный вектор амплитудно-фазового распределения $D(f)$, обеспечивающий взаимную отстройку коррелированных процессов таких двух источников излучения.

И наконец, рассмотрим следующую постановку задачи разрешения точечных источников [30]. Поле r точечных источников задано, как и выше, векторами их волновых фронтов $L_i(f)$, ориентированных относительно АР с M элементами; шум изотропный, не коррелированный по пространству; спектры источников и шума соответственно $g_i(f)$ и $g_n(f)$. Задача разрешения сводится к синтезу антенного процессора, осуществляющего линейную обработку M -мерного входного процесса и имеющего r выходов, т. е. матричная КЧХ процессора есть $M \times r$ -матрица $D(f) = [D_1(f), D_2(f), \dots, D_r(f)]$, где $D_i(f)$ — M -компонентный вектор. Выходной r -мерный процесс такого матричного фильтра $U(f) = D^T(f) X(f)$, где $X(f)$ — M -мерный вектор входного процесса. Задача синтеза сводится

к следующему: максимизировать выходное отношение с/ш на выходе каждого из r многомерных фильтров $D_i(f)$, образующих матричную КЧХ $D(f)$, при условии подавления остальных сигналов, рассматриваемых как помехи. Математически это означает, что векторы $D_i(f)$ должны быть найдены исходя из критерия

$$\frac{g_i(f) |D_i^T(f) \bar{L}_i(f)|^2}{g_n(f) |D_i(f)|^2} \rightarrow \max_{D_i} \quad \text{при условии } D_i^T(f) \bar{L}_j(f) = 0,$$

где $i = 1, 2, \dots, r$ и $j \neq i$, т. е. $j = 1, 2, \dots, i - 1, i + 1, \dots, r$.

Решение этой вариационной задачи с помощью множителей Лагранжа приводит к выражению

$$\tilde{D}(f) = \bar{L}(f) [\Lambda^T(f) \bar{L}(f)]^{-1},$$

где использована нормировка $\tilde{D}_i^T(f) \bar{L}_i(f) = 1$. Нетрудно показать, что такое решение удовлетворяет наложенным ограничениям, так как $\Lambda^T \tilde{D} = E_r$, где E_r — единичная матрица порядка $r \times r$. Как следует из рассмотренной постановки задачи разрешения точечных источников, ее алгоритм решения требует априорного знания угловых положений разрешаемых источников, как и выше в постановке работы [85], или оценки $G_x(f)$ (2.7.46).

Глава 3

АДАПТИВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ОБРАБОТКИ

Для реализации оптимальной СПВО требуется исчерпывающая априорная информация о пространственных и временных характеристиках полей сигнала, шума и помех. Однако фактически имеются сведения лишь о некоторых из этих характеристик, а поэтому информация о недостающих характеристиках и их параметрах должна быть восполнена в процессе функционирования системы. Широкое использование для этой цели методов адаптации привело к созданию в антенной технике нового направления — ААС, в котором используется весь арсенал адаптивных методов [62]: расширение числа оцениваемых параметров, использование итеративных процедур и эмпирических оценок.

Основой ААС является процессор, представляющий собой совокупность ЛЗ с отводами и перестраиваемыми коэффициентами, которые автоматически регулируются так, чтобы создать ХН АР, обеспечивающую оптимальную пространственную фильтрацию, например с зонами подавления („нулями“) в направлении на локальные помехи. Именно в связи с этой задачей и появились первые работы по ААС [66, 16, 71], а также последующие публикации, обзор которых дан в работах [3, 52, 43, 46]. В связи с этим далее излагаются лишь физические предпосылки

и основное содержание методов обработки информации в ААС, однако большое внимание уделяется выявлению той логической основы, которая позволяет использовать алгоритмы адаптивной обработки информации в ААС для адаптивной оптимизации алгоритмов обнаружения многомерных сигналов в СПВО.

3.1. Алгоритмы адаптивной оптимизации антенной системы, основанные на минимизации среднеквадратической ошибки оценки сигнала и связи задач фильтрации и обнаружения многомерного сигнала

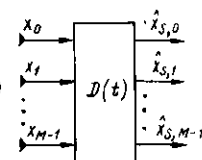
Основное свойство оптимальной СПВО — способность наилучшим образом осуществлять не только временную, но и пространственную фильтрацию многомерного сигнала. Оказывается, что это ее свойство тесным образом связано с задачей оптимальной фильтрации (оценки в каждый момент времени) многомерного сигнала на фоне многомерных помех. Решение задачи многомерной винеровской фильтрации и является той основой, которая используется для алгоритмов адаптивной оптимизации обработки информации в ААС, о которых говорилось выше.

Оптимальная фильтрация многомерного сигнала (непрерывное время). Рассмотрим АР с M элементами, на выходах которых задан многомерный стационарный процесс $\mathcal{X}(t)$ (с нулевым математическим ожиданием), являющийся суммой многомерных сигнала и шума $\mathcal{X}_s(t) + \mathcal{X}_n(t)$ (рис. 3.1), для которых известны матричные размером $M \times M$ корреляционные функции $R_s(\tau) + R_n(\tau) = R_x(\tau)$. Задача оптимальной линейной фильтрации многомерного сигнала $\mathcal{X}_s(t)$ из смеси его с шумом $\mathcal{X}_n(t)$ заключается в нахождении оценки сигнала — M -мерного случайного процесса $\hat{\mathcal{X}}_s(t) - [9, 57]$, определяемого соотношением

$$\hat{\mathcal{X}}_s(t) = \int_0^\infty \mathcal{D}(\lambda) \mathcal{X}(t - \lambda) d\lambda, \quad (3.1.1)$$

где $M \times M$ -матрица $\mathcal{D}(t)$ реализует алгоритм фильтрации с помощью совокупности M физических возможных M -мерных импульсных функций [строк матрицы $\mathcal{D}(t)$]. Матрица $\mathcal{D}(t)$ должна быть определена исходя из условия минимизации следа корреляционной матрицы вектора ошибок $\mathcal{X}_e(t) = \mathcal{X}_s(t) - \hat{\mathcal{X}}_s(t)$, т. е. величины

$$\begin{aligned} \text{tr} [M \{ \mathcal{X}_e(t) \mathcal{X}_e^T(t) \}] &= \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} M \{ [x_{s,m}(t) - \hat{x}_{s,m}(t)]^2 \}. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$



Минимизация следа эквивалентна минимизации каждой его составляющей. Для m -й составляющей

Рис. 3.1

$x_{e,m}(t) = x_{s,m}(t) - \hat{x}_{s,m}(t) = x_{s,m}(t) - \int_0^{\infty} \mathcal{D}(m)(\lambda) \mathcal{X}(t-\lambda) d\lambda$,
 где $\mathcal{D}(m)(t)$ – вектор-строка – m -я строка матрицы $\mathcal{D}(t)$. Нетрудно показать, что дисперсия ошибки $M\{x_{e,m}^2(t)\}$

$$\sigma_{e,m}^2 = r_s(0) - 2 \int_0^{\infty} \mathcal{D}(m)(\lambda) R_s^{(m)}(\lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \mathcal{D}(m)(\lambda) R_x(\lambda_2 - \lambda_1) \mathcal{D}^T(m)(\lambda_1) d\lambda d\lambda_1, \quad (3.1.3)$$

где $-r_s(\tau)$ – корреляционная функция сигнала; $R_s^{(m)}(\tau)$ – вектор-столбец (m -й столбец матричной корреляционной функции сигнала $R_s(\tau)$), минимальна, если вектор-строка $\mathcal{D}(m)(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\int_0^{\infty} R_x(\tau - \lambda) \mathcal{D}^T(m)(\lambda) d\lambda = R_s^{(m)}(\tau).$$

Отсюда следует, что оптимальная оценочная матрица $\mathcal{D}(t)$, доставляющая минимум дисперсии суммы ошибок [см. (3.1.2)], должна удовлетворять матричному интегральному уравнению

$$\int_0^{\infty} R_x(\tau - \lambda) \mathcal{D}(\lambda) d\lambda = R_s(\tau). \quad (3.1.4)$$

Пренебрегая требованием физической возможности матричной импульсной функции $\mathcal{D}(t)$, найдем решение уравнения (3.1.4) с помощью преобразования Фурье

$$D(f) = [G_s(f) + G_n(f)]^{-1} G_s(f), \quad (3.1.5)$$

где матрица $D(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{D}(t)\}$; $G_s(f)$ и $G_n(f)$ – матрицы ВСПМ сигнала и шума. Если сигнал плосковолновой и его матрица $G_s(t)$ определяется формулой (2.1.3), то

$$D(f) = g_s(f) [G_s(f) + G_n(f)]^{-1} \bar{L}_s^T(f) L_s^T(f) = W(f) L_s^T(f), \quad (3.1.6)$$

где

$$\begin{aligned} W(f) &= g_s(f) [G_s(f) + G_n(f)]^{-1} \bar{L}_s^T(f) = \\ &= \frac{g_s(f)}{g_n(f) + g_s(f) L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s^T(f)} N^{-1}(f) \bar{L}_s^T(f) \approx \\ &\approx \frac{g_s(f)}{g_n(f)} N^{-1}(f) \bar{L}_s^T(f). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Вектор-функция (3.1.7) определяет КЧХ M -мерного фильтра, обеспечивающего оптимальную фильтрацию плосковолнового многомерного сигнала на фоне многомерного шума. Из сравнения формул (3.1.7) и (2.1.39) следует, что

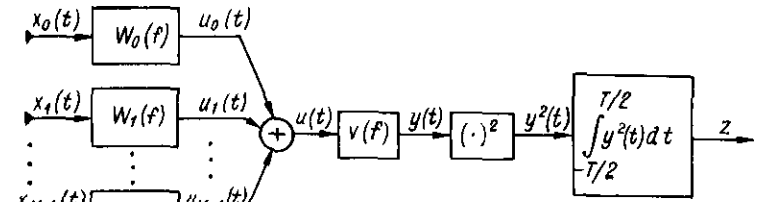


Рис. 3.2

$$h(f) H(f) = v(f) W(f), \quad (3.1.8)$$

$$v(f) = \sqrt{\frac{1 + (g_s(f)/g_n(f)) \bar{L}_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)}{g_s(f)}} \approx \frac{1}{\sqrt{g_s(f)}}.$$

Таким образом, результирующая КЧХ оптимальной СПВО, равная произведению $h(f)H(f)$, отличается лишь скалярным множителем $v(f)$ [см. (3.1.8)] от КЧХ оптимального винеровского многомерного фильтра $W(f)$, причем при малом входном отношении с/ш КЧХ $v(f) \approx 1/\sqrt{g_s(f)}$. Следовательно, для реализации оптимальной СПВО можно использовать многомерный фильтр с КЧХ $W(f)$ и скалярный с КЧХ $v(f)$, что и является основой для применения методов адаптивной оптимизации [20, 21].

Структурная схема оптимальной СПВО, содержащая многомерный фильтр с векторной КЧХ $W(f)$ [см. (3.1.7)] и скалярный – с КЧХ $v(f)$ [см. (3.1.8)], показана на рис. 3.2. Из сравнения этой схемы СПВО с основной схемой СПВО, изображенной на рис. 2.1 и содержащей фильтры соответственно с КЧХ $H(f)$ и $h(f)$ [см. (2.1.39)], видно, что различие заключается лишь в некотором перераспределении функций фильтрации между многомерным и скалярным фильтрами. Соотношение (3.1.8), устанавливающее связь КЧХ $H(f)$ и $W(f)$, показывает, что решение задачи пространственно-временной фильтрации многомерного сигнала фактически является решением задачи получения его оценки.

Матрица $D(f)$ [см. (3.1.5)] определяет решение задачи фильтрации многомерного сигнала в общем случае [ср. с процедурой обработки (2.1.24)]. В частном случае, когда сигнал плосковолновой, КЧХ его оптимального фильтра является $M \times 1$ -матрица, т. е. вектор с M составляющими, минимизирующий дисперсию ошибки $e(t) = s(t) - u(t)$ – скалярную функцию векторной КЧХ многомерного фильтра. Сохранив для его КЧХ обозначение $W(f)$, нетрудно показать, что дисперсия указанной ошибки [21]

$$\sigma_e^2 = \int_{f_B}^{f_B} \left\{ \bar{W}^T(f) [G_s(f) + G_n(f)] W(f) - 2 \operatorname{Re} [W^T(f) g_s(f) L_s(f)] + g_s(f) \right\} df$$

[это же выражение следует из формулы (3.1.3) в результате применения формулы Парсеваля]. Требование минимизации этого функционала приводит к уравнению

$$\bar{V}_W \{ W^T(f) [G_s(f) + G_n(f)] W(f) - g_s(f) [W^T(f) L_s(f) + \bar{W}^T(f) \bar{L}_s(f)] + g_s(f) \} = 0,$$

решением которого является выражение (3.1.7).

Таким образом, оптимальная оценка [см. (3.1.1)] в случае плоского волнового сигнала есть скалярная величина

$$u_s(t) = \int_0^\infty W^T(\lambda) X(t - \lambda) d\lambda, \quad (3.1.9)$$

где $W(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ W(f) \}$ — вектор с M компонентами $w_m(t)$. Пренебрегая условием физической возможности (при $\tau_{\text{кор}}$, существенно меньшем времени наблюдения) находим из последнего выражения оценку $U_s^{\wedge}(f)$ в частотной области

$$U_s^{\wedge}(f) = X^T(f) W(f) = \left[\frac{g_s(f)}{g_n(f) + g_s(f) L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)} \right] \times \\ \times X^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f) = h^2(f) X^T(f) H(f) \approx g_s(f) X^T(f) H(f), \quad (3.1.10)$$

где КЧХ $h(f)$ и $H(f)$ определяются формулой (2.1.39), а приближенная часть равенства (3.1.10) отвечает случаю малого входного отношения с/ш. Как было показано в разд. 2.1, изображение $U_s^{\wedge}(f)$ входит в алгоритм оптимальной СПВО [см. (2.1.42)], а также в алгоритм обработки (2.1.40), так как $h(f) X^T(f) H(f) = v(f) X^T(f) W(f) = v(f) U_s^{\wedge}(f)$.

Оптимальная фильтрация многомерного сигнала (дискретное время). Исходная информация здесь та же, что и в разд. 2.5 при синтезе алгоритма оптимальной СПВО для дискретного времени (ML -мерный вектор X пространственно-временных выборок $x_m(l \Delta)$, где $m = 0, 1, \dots, M - 1$ и $l = 1, 2, \dots, L$). Вектор X является суммой векторов многомерного сигнала X_s и шума X_n , для которых заданы $ML \times ML$ -матрицы корреляций R_s и R_n . Задача оптимальной линейной фильтрации дискретного многомерного сигнала X_s из смеси его с многомерным шумом X_n сводится [10, 57] аналогично (3.1.1) к оценке сигнала — ML -мерного вектора X_s , определяемого соотношением

$$\hat{X}_s = D X, \quad (3.1.11)$$

где $ML \times ML$ -матрица D должна быть найдена исходя из условия минимизации следа матрицы корреляций ошибок $X_e = X_s - \hat{X}_s$, т. е.

$$\text{tr} [M \{ X_e X_e^T \}] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{l=1}^L M \{ [x_{s,m}(l) - \hat{x}_{s,m}(l)]^2 \}. \quad (3.1.12)$$

Решением этой известной задачи является матрица

$$D = R_s (R_s + R_n)^{-1} = (R_s^{-1} + R_n^{-1})^{-1} R_n^{-1}, \quad (3.1.13)$$

а поэтому

$$\hat{X}_s = (R_s^{-1} + R_n^{-1})^{-1} R_n^{-1} X. \quad (3.1.14)$$

Сравнив последнюю формулу с выражением для отношения правдоподобия (2.5.3), находим, что его можно представить в виде

$$\Lambda(X) = 1/2 X^T R_n^{-1} \hat{X}_s. \quad (3.1.15)$$

Такая интерпретация алгоритма обработки уже обсуждалась в разд. 2.1 в связи с представлениями алгоритма оптимальной СПВО в виде (2.1.42) и (2.5.11). В случае малого входного отношения с/ш матрица [см. (3.1.13)] $D \approx R_s R_n^{-1}$, а поэтому в соответствии с формулой (3.1.14) $\hat{X}_s \approx R_s R_n^{-1} X$, что приводит отношение правдоподобия (3.1.15) к выражению (2.5.4).

Таким образом, еще раз подтвердилась тесная связь решений задач оптимальной оценки и обнаружения многомерного сигнала. Важно отметить, что для гауссовых процессов решение (3.1.14) удовлетворяет не только линейной оценке с минимальной среднеквадратической ошибкой, но и оценке по максимуму правдоподобия, а также байесовской оценке по максимуму апостериорной плотности распределения — оценка $\hat{X}_s = D X$ есть условное среднее $M\{ X_s | X \}$.

Интересно рассмотреть случай плосковолнового сигнала. Положим для простоты, что АР компенсирована в направлении ожидаемого сигнала, и воспользуемся обозначениями матриц-блоков и векторов-блоков, образующих матрицы R_s и $R_n^{-1} = Q$ и вектор X (см. разд. 2.5). Это $M \times M$ -матрицы-блоки $R_s(l, k) = r_s(l, k) I I^T$ и $Q(l, k)$, а также M -компонентные векторы-блоки $X(l)$. Поэтому, подобно (2.5.6), из выражения $\hat{X}_s = R_s R_n^{-1} X$ для M -компонентного вектора оценки сигнала $\hat{X}_s(l)$ имеем

$$\hat{X}_s(l) = \hat{u}_s^*(l) I; \\ \hat{u}_s^*(l) = \sum_{k=1}^l \sum_{l_1=1}^L r_s(l, l_1) I^T Q(l_1, k) X(k), \quad (3.1.16)$$

где в отличие от выражения (2.5.6) изменена последовательность дискретных сверток по l_1 и k . В результате для плосковолнового компенсированного сигнала его оценка-вектор $\hat{X}_s(l)$ имеет все M компонент, равные одной и той же скалярной величине $\hat{u}_s^*(l)$. Выражение (3.1.16) для оценки $\hat{u}_s^*(l)$ можно представить в виде

$$\hat{u}_s^*(l) = \sum_{k=1}^l \hat{W}^T(l-k) X(k) = \sum_{n=1}^N \hat{W}^T(n) X(l-n), \quad (3.1.17)$$

где вектор весовых коэффициентов $\hat{W}(l)$ есть результат вычисления внутренней свертки (3.1.16), причем по соображениям, изложенным при

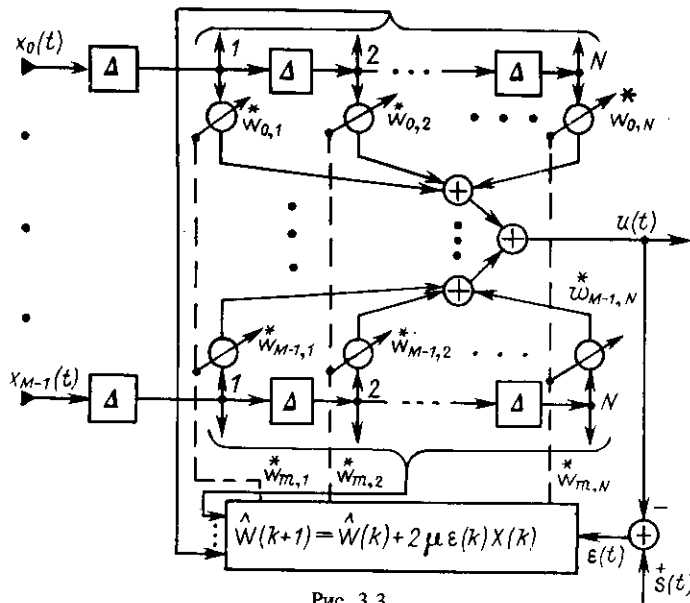


Рис. 3.3

записи формулы (2.5.10), для стационарного процесса он отвечает векторной импульсной характеристикой стационарного дискретного фильтра

$$\hat{W}^T(l-k) = \sum_{l_1=1}^L r_s(l-l_1) I^T Q(l_1-k).$$

Вторая часть записи выражения (3.1.17) обусловлена той же причиной, что и указанная выше в связи с записью формулы свертки (2.5.14).

Из сравнения формул (3.1.9) и (3.1.17) видно, что дискретная векторная импульсная характеристика $\hat{W}(n)$ есть в первом приближении результат аппроксимации непрерывной векторной характеристики $W(t)$ при $t = n\Delta$ на интервале обработки $T_0 = N\Delta$.

Оптимальная фильтрация многомерного плосковолнового сигнала в адаптивной антенной системе. В разд. 2.1 были получены все исходные зависимости, необходимые для рассмотрения ААС. Положим, что имеется АР с M элементами, на выходах каждого из которых реализован фильтр на ЛЗ с отводами и весовыми коэффициентами, импульсная характеристика которого $\hat{w}_m(t)$ определяется выражением (2.5.16), а структурная схема изображена на рис. 2.18. Структурная схема ААС, содержащая M таких фильтров, изображена на рис. 3.3. На выходе сумматора M -мерного фильтра, реализуемого на ЛЗ, получим

$$u(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=1}^N \hat{w}_{mn} x_m(t-n\Delta). \quad (3.1.18)$$

Далее удобно перейти к векторной записи, подобной использованной выше для выражения ОП (2.5.1). Нумерация компонент MN -мерных

векторов отвечает перебору величин m и n по схеме „цикл в цикле”, где внутренний цикл выполняется по m , а внешний — по n , следовательно, сквозная нумерация компонент есть $i = 0, 1, \dots, I$, где $I = MN - 1$. В результате имеем

$$W^T = \{ \hat{w}_{0,1}, \hat{w}_{1,1}, \dots, \hat{w}_{M-1,1}; \dots; \hat{w}_{0,N}, \hat{w}_{1,N}, \dots, \hat{w}_{M-1,N} \}, \quad (3.1.19)$$

$$X^T(t) = \{ x_0(t-\Delta), x_1(t-\Delta), \dots, x_{M-1}(t-\Delta); \dots; x_0(t-N\Delta), x_1(t-N\Delta), \dots, x_{M-1}(t-N\Delta) \}, \quad (3.1.20)$$

Следовательно,

$$u(t) = W^T X(t) = X^T(t) W. \quad (3.1.21)$$

Положим, что на вход АР воздействует аддитивная смесь поля изотропно-го шума и плосковолновых полей сигнала и локальной помехи, АР — линейная с межэлементным расстоянием d , а сигнал и помеха приходят с направлений, определяемых соответственно углами α_s и α_p . В таком случае $X(t) = X_s(t) + X_n(t) + X_p(t)$, где векторы правой части этого равенства для сигнала, шума и помехи определяются следующим образом:

$$X_s^T(t) = \{ s(t-\Delta), s[(t-\Delta) - \delta_s], \dots, s[(t-\Delta) - (M-1)\delta_s]; \dots; s(t-N\Delta), s[(t-N\Delta) - \delta_s], \dots, s[(t-N\Delta) - (M-1)\delta_s] \}; \quad (3.1.22)$$

$$X_n^T(t) = \{ n_0(t-\Delta), n_1(t-\Delta), \dots, n_{M-1}(t-\Delta); \dots; n_0(t-N\Delta), n_1(t-N\Delta), \dots, n_{M-1}(t-N\Delta) \}; \quad (3.1.23)$$

$$X_p^T(t) = \{ p(t-\Delta), p[(t-\Delta) - \delta_p], \dots, p[(t-\Delta) - (M-1)\delta_p]; \dots; p(t-N\Delta), p[(t-N\Delta) - \delta_p], \dots, p[(t-N\Delta) - (M-1)\delta_p] \}; \quad (3.1.24)$$

где $s(t)$ и $p(t)$ — сигнал и помеха на выходе элемента с номером $m=0$; $n_0(t), n_1(t), \dots, n_{M-1}(t)$ — шум на выходах элементов АР; единичные задержки $\delta_s = (d/c) \sin \alpha_s$, $\delta_p = (d/c) \sin \alpha_p$.

Полагаем, что введенные многомерные процессы стационарны, имеют нулевые математические ожидания, а их корреляционные матрицы

$$R_{ss}(\tau) = M \{ X_s(t) X_s^T(t+\tau) \}; \quad R_{nn}(\tau) = M \{ X_n(t) X_n^T(t+\tau) \}; \\ R_{pp}(\tau) = M \{ X_p(t) X_p^T(t+\tau) \}. \quad (3.1.25)$$

Элементы этих теплицевых матриц, отвечающие i -й строке и i_1 -му столбцу, где величина i определяется параметрами m и n , а величина i_1 — параметрами m_1 и n_1 , таковы:

$$M\{s(t - n\Delta - m\delta_s)s(t + \tau - n_1\Delta - m_1\delta_s)\} = r_s[\tau + (n - n_1)\Delta + (m - m_1)\delta_s]; \quad (3.1.26)$$

$$M\{n_m(t - n\Delta)n_{m_1}(t + \tau - n_1\Delta)\} = r_{n_m n_{m_1}}[\tau + (n - n_1)\Delta]; \quad (3.1.27)$$

$$M\{p(t - n\Delta - m\delta_p)p(t + \tau - n_1\Delta - m_1\delta_p)\} = r_p[\tau + (n - n_1)\Delta + (m - m_1)\delta_p], \quad (3.1.28)$$

где $r_s(\tau)$ и $r_p(\tau)$ – корреляционные функции сигнала и помехи на выходе элемента АР; $r_{n_m n_{m_1}}(\tau)$ – взаимная корреляционная функция шума на m -м и m_1 -м элементах АР. Корреляционная матрица входного процесса есть сумма матриц [см. (3.1.25)]

$$R_{xx}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau) + R_{pp}(\tau). \quad (3.1.29)$$

На рис. 3.4 показана функциональная схема ААС, где входами являются процессы $x_i(t)$ на отводах ЛЗ.

Теперь имеются все исходные данные, необходимые для определения адаптивного алгоритма вычисления оптимальных весовых коэффициентов. Критерий оптимизации есть дисперсия ошибки оценки сигнала

$$\epsilon(t) = s(t) - u(t) = s(t) - W^T X(t). \quad (3.1.30)$$

Величина дисперсии σ^2 ошибки $\epsilon(t)$

$$\sigma^2 = M\{[s(t) - W^T X(t)]^2\} = W^T R_{xx} W - 2W^T R_{xs} + r_s(0), \quad (3.1.31)$$

где R_{xx} – матрица корреляций (3.1.29) при $\tau=0$, а вектор $R_{xs} = M\{X(t)s(t)\} = M\{X_s(t)s(t)\}$. В соответствии с определением (3.1.26) i -я составляющая этого вектора (i отвечает некоторым значениям параметров m и n) есть

$$M\{s(t - n\Delta - m\delta_s)s(t)\} = r_s(n\Delta + m\delta_s), \quad (3.1.32)$$

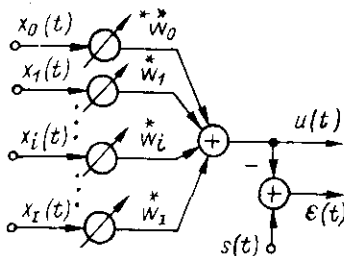


Рис. 3.4

т. е. представляет собой значение корреляционной функции сигнала $r_s(\tau)$ при $\tau = n\Delta + m\delta_s$.

Задача заключается в минимизации дисперсии σ^2 [см. (3.1.31)] – параболической зависимости в MN -мерном пространстве, имеющей единственный экстремум. Точка экстремума находится путем решения уравнения

$$\nabla_W \sigma^2 = 2R_{xx} W - 2R_{xs} = 0 \quad (3.1.33)$$

и определяет вектор оптимальных весовых коэффициентов

$$W_0 = R_{xx}^{-1} R_{xs}, \quad (3.1.34)$$

а минимальное значение дисперсии (3.1.31) в таком случае

$$\sigma_{\min}^2 = r_s(0) - R_{xs}^T R_{xx}^{-1} R_{xs} \quad (3.1.35)$$

В разд. 2.5 отмечалось, что вначале целесообразно решить задачу синтеза физически невозможного фильтра, а затем, путем введения задержки, перейти к фильтру физически возможному. Применительно к рассматриваемому случаю это осуществляется следующим образом: во всех введенных выше величинах нужно изменить начало отсчета переменной $n=1, 2, \dots, N$ сдвигом на $N/2+1$ влево, т. е. перейти к переменной $n=-N/2, \dots, 0, 1, \dots, N/2-1$; в результате матрица R_{xx} не изменится, а составляющие вектора R_{xs} будут определяться той же формулой (3.1.32), но с новой нумерацией по n . После определения весового вектора W_0 (3.1.34) возвращение к физически возможному фильтру достигается путем обратного перехода к старому отсчету переменной n , т. е. сдвигом на $N/2+1$ вправо [введением задержки на $(N/2+1)\Delta$].

Уравнение (3.1.33) называют уравнением Винера. Обычно оно известно больше в его непрерывном варианте для случая минимизации дисперсии ошибки фильтрации сигнала $\epsilon(t) = s(t) - \int_0^T w^T(\lambda) X(t-\lambda) d\lambda$, что приводит к векторному интегральному уравнению Винера

$$\int_0^T R_{xx}(\tau - \lambda) w(\lambda) d\lambda = R'_{xs}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq T,$$

где $R_{xx}(\tau)$ – $M \times M$ -матрица корреляций входного процесса; $R'_{xs}(\tau)$ – M -мерный вектор с составляющими $r_s(\tau + m\delta_s)$, определяемыми аналогично (3.1.32). Решение этого векторного интегрального уравнения, удовлетворяющее условию физической осуществимости многомерного фильтра, для общего случая не известно. Переход к дискретным значениям $\tau = n\Delta$, где $n=1, 2, \dots, N$ и $T=N\Delta$ приводит эту систему M интегральных уравнений к системе MN линейных уравнений (3.1.33) и его решению (3.1.34).

Определение оптимальных весовых коэффициентов методом наискорейшего спуска. Определение оптимального вектора W_0 с помощью формулы (3.1.34) связано с необходимостью обращения матрицы корреляций R_{xx} . Более простым оказывается определение вектора W_0 методом наискорейшего спуска (методом градиента). Основанием для этого служат следующие обстоятельства: во-первых, функция σ^2 (3.1.31) имеет единственный экстремум (унимодальная функция) и, во-вторых, сам градиент определяется аналитически на основе равенства (3.1.33):

$$\bar{\nabla} = 2R_{xx} W - 2R_{xs}. \quad (3.1.36)$$

Обозначим через k номер шага итеративной процедуры, отвечающей моменту времени $t = k \Delta$, а через μ — величину шага в направлении, обратном градиенту, тогда

$$W(k+1) = W(k) - \mu \bar{V}(k) = W(k) - 2\mu [R_{xx}W(k) - R_{xs}]. \quad (3.1.37)$$

Проанализируем условия сходимости такого алгоритма. Для этого удобно [61] перейти к вектору ошибок определения весовых коэффициентов на k -й реализации, равному разности $W(k)$ и оптимального вектора W_0 (3.1.34), который обозначим через $W'(k)$, т. е.

$$W'(k) = W(k) - W_0. \quad (3.1.38)$$

Кроме того, выполним преобразование подобия матрицы R_{xx} и представим ее в виде

$$R_{xx} = F \Lambda F^{-1} = F \Lambda F^T, \quad (3.1.39)$$

где Λ — диагональная матрица собственных чисел матрицы R_{xx} , $\Lambda = \text{diag} [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_I]$, а соответствующие этим числам собственные векторы являются столбцами матрицы F (матрица R_{xx} положительно определена, поэтому $\lambda_i > 0$). Так как

$$\bar{V}(k) = 2R_{xx}W(k) - 2R_{xs} = 2R_{xx}[W(k) - W_0] = 2R_{xx}W'(k), \quad (3.1.40)$$

то алгоритм (3.1.37) может быть представлен в виде

$$V(k+1) = V(k) - 2\mu \Lambda V(k) = [E - 2\mu \Lambda] V(k), \quad (3.1.41)$$

где $V(k) = F^{-1} [W(k) - W_0]$. Полагая, что начальный вектор $V(0) = F^{-1} [W(0) - W_0]$, из уравнения (3.1.41) находим вектор $V(k)$ для k -й итерации, выраженный через начальный вектор $V(0)$:

$$V(k) = [E - 2\mu \Lambda]^k V(0),$$

для i -й составляющей вектора $V(k)$

$$v_i(k) = (1 - 2\mu \lambda_i)^k v_i(0). \quad (3.1.42)$$

Сходимость имеет место, если выполняется условие $|1 - 2\mu \lambda_i| < 1$, что приводит к неравенству, которому должна удовлетворять постоянная μ ,

$$0 < \mu < 1/\lambda_{\max}, \quad (3.1.43)$$

где λ_{\max} — максимальное из собственных чисел λ_i . Из выражения (3.1.42) следует, что процесс сходимости во времени для i -й компоненты вектора

$V(k)$ может быть описан экспоненциальной зависимостью с некоторой постоянной времени τ_i , определяемой равенством

$$(1 - 2\mu \lambda_i)^k = \exp [-(\Delta k)/\tau_i].$$

Отсюда видно, что в случае, когда $(\Delta k)/\tau_i \ll 1$,

$$\tau_i = -\Delta / \ln(1 - 2\mu \lambda_i) \approx \Delta / 2\mu \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, I. \quad (3.1.44)$$

Таким образом, верхняя граница скорости сходимости градиентной процедуры вычисления весовых коэффициентов определяется шагом μ и минимальным собственным числом λ_{\min} . Собственные числа λ_i матрицы R_{xx} тем больше, чем больше мощность входного процесса, поэтому скорость сходимости весового вектора к его оптимальному значению возрастает с увеличением мощности процесса. Если разброс собственных значений λ_i велик и некоторые из них затухают слабо, то скорость сходимости по сравнению с вариантом, когда величины λ_i расположены компактно, возрастает.

В заключение заметим, что переход к разностному вектору W' [см. (3.1.38)] и использование преобразования подобия (3.1.39), позволяют представить величину дисперсии σ^2 [см. (3.1.31)] в следующем виде:

$$\sigma^2 = \sigma_{\min}^2 + (W - W_0)^T R_{xx} (W - W_0) = \sigma_{\min}^2 + V^T \Lambda V, \quad (3.1.45)$$

где σ_{\min}^2 определяется формулой (3.1.35). Если $W = W_0$, то $V = 0$ и $\sigma^2 = \sigma_{\min}^2$, поэтому величина квадратичной формы в этом равенстве определяет меру близости σ^2 к σ_{\min}^2 .

Алгоритм адаптивной оптимизации весовых коэффициентов на случайных реализациях входных процессов. Для реализации алгоритма градиентного спуска нужно знать градиент $V(k)$ [см. (3.1.36)], т. е. знать корреляционную матрицу входного процесса R_{xx} [см. (3.1.29)] и вектор R_{xs} с составляющими [см. (3.1.32)]. Первый алгоритм адаптивной оптимизации АР (алгоритм Уидроу [66]) основан на замене указанных выше корреляционных характеристик на их простейшие эмпирические оценки:

$$\begin{aligned} R_{xx} &= M\{X(k)X^T(k)\} \approx X(k)X^T(k); \\ R_{xs} &= M\{X(k)s(k)\} \approx X(k)s(k), \end{aligned} \quad (3.1.46)$$

где k -й шаг адаптивной процедуры отвечает моменту времени $t = k \Delta$. В таком случае градиент (3.1.36) может быть заменен на его оценку:

$$\begin{aligned} \hat{V}(k) &= 2X(k)[X^T(k)W(k) - s(k)] = 2X(k)[u(k) - s(k)] = \\ &= -2X(k)\epsilon(k). \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

В результате использования этой оценки градиента алгоритм наискорейшего спуска (3.1.37) принимает вид

$$\hat{W}(k+1) = \hat{W}(k) - \mu \hat{V}(k) = \hat{W}(k) + 2\mu \epsilon(k) X(k). \quad (3.1.48)$$

Так как оценка градиента $\hat{V}(k)$, входящая в правую часть этого алгоритма, есть случайный вектор, то, в отличие от алгоритма (3.1.37), здесь также случайны и векторы весовых коэффициентов $\hat{W}(k+1)$ и $\hat{W}(k)$. Поэтому, чтобы алгоритм (3.1.48) был в принципе работоспособен, необходимо, чтобы случайный вектор $\hat{W}(k)$ сходил к оптимальному вектору весовых коэффициентов W_0 [см. (3.1.34)].

Доказательство сходимости алгоритма (3.1.48) [66] выполняется в предположении, что векторы входного процесса $X(k)$ и $X(k+1)$ не коррелированы. В таком случае векторы $X(k)$ и $\hat{W}(k)$ также не коррелированы, так как вектор $\hat{W}(k)$ определяется лишь векторами $X(k-1)$, $X(k-2)$ и т. д. Поэтому в результате применения операции математического ожидания к левой и правой частям равенства (3.1.48) находим

$$M\{\hat{W}(k+1)\} = (E - 2\mu R_{xx})M\{\hat{W}(k)\} + 2\mu R_{xs}.$$

В предположении, что процесс стационарный, а начальный весовой вектор равен $W(0)$, после $k+1$ применения этого выражения получаем

$$M\{\hat{W}(k+1)\} = (E - 2\mu R_{xx})^{k+1} W(0) + 2\mu \sum_{i=1}^k (E - 2\mu R_{xx})^i R_{xs}. \quad (3.1.49)$$

Далее, применив к матрице R_{xx} преобразование подобия (3.1.39), нетрудно убедиться, что $\lim_{k \rightarrow \infty} (E - 2\mu \Lambda)^{k+1} \rightarrow 0$, а $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k (E - 2\mu \Lambda)^i = (1/2\mu) \Lambda^{-1}$. Таким образом, с учетом (3.1.39) находим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M\{\hat{W}(k+1)\} = F \Lambda^{-1} F^{-1} R_{xs} = R_{xx}^{-1} R_{xs} = W_0. \quad (3.1.50)$$

Следовательно, предельное значение весового вектора сходится к его оптимальному значению W_0 [см. (3.1.34)]. Так как определение собственных чисел матрицы является трудоемкой задачей, то на практике используют более жесткое условие, основанное на вычислении следа матрицы $\text{tr} R_{xx} = \sum_{m=0}^{M-1} M\{x_m^2(t)\}$, определяющего суммарную мощность процессов на выходе элементов АР. Так как $\text{tr} R_{xx} > \lambda_{\max}$ и матрица R_{xx} положительно определенная, то условие (3.1.43) принимает вид

$$0 < \mu < 1/\text{tr} R_{xx}. \quad (3.1.51)$$

Рассмотрим изменение дисперсии ошибки (3.1.45) в процессе адаптации, когда $\sigma^2(k) = \sigma_{\min}^2 + V^T(k) \Lambda V(k)$. Используя зависимость (3.1.42), из последнего выражения получаем

$$\sigma^2(k) = \sigma_{\min}^2 + V^T(0) \Lambda (E - 2\mu \Lambda)^{2k} V(0). \quad (3.1.52)$$

Осредняя обе части этого равенства на множестве процессов адаптации [при одном и том же векторе $V(0)$ для множества стационарных эргодических входных процессов], находим, что в установившемся режиме при $k \rightarrow \infty$ $\sigma^2(k) \rightarrow \sigma_{\min}^2$. Постоянная затухания θ_i для i -й составляющей находится подобно τ_i [см. (3.1.44)]:

$$\theta_i = -\Delta/2 \ln(1 - 2\mu \lambda_i) \approx \Delta/4 \mu \lambda_i = \tau_i/2. \quad (3.1.53)$$

Зависимость $\sigma^2(k)$ от числа циклов адаптации (или времени), представленную в виде графика (рис. 3.5), называют кривой обучения (1). Кривая 2 иллюстрирует эффект действия шумовой составляющей градиента — шума градиента.

Рассмотрим [61] влияние этого шума в установившемся режиме, полагая, что входные процессы стационарны, а векторы $X(k)$ и $X(k+1)$ не коррелированы во времени. В таком случае оценку градиента (3.1.47) можно представить в виде

$$\hat{V}(k) = -2\epsilon(k) X(k) = V(k) + \Xi(k), \quad (3.1.54)$$

где $\bar{V}(k)$ — истинное значение градиента [см. (3.1.40)]; $\Xi(k)$ — вектор его шумовой составляющей с нулевым средним значением, т. е. $M\{\Xi(k)\} = \bar{V}(k)$. Как следует из теории линейного оптимального оценивания, при $W(k) = W_0$ вектор $X(k)$ и ошибка $\epsilon(k)$ не коррелированы между собой, так как они ортогональны. В таком случае корреляционная матрица шума адаптации

$$\begin{aligned} M\{\Xi(k) \Xi^T(k)\} &= 4M\{\epsilon^2(k) X(k) X^T(k)\} = \\ &= 4M\{\epsilon^2(k)\} R_{xx} = 4\sigma_{\min}^2 R_{xx}, \end{aligned} \quad (3.1.55)$$

так как при $W(k) = W_0$ вектор $V(k) = 0$ и в соответствии с (3.1.45) $M\{\sigma^2(k)\} = \sigma_{\min}^2$.

Таким образом, при $W(k) = W_0$ можно принять, что шум градиента $\Xi(k)$ представляет собой стационарный многомерный случайный процесс, составляющие которого не коррелированы во времени, а для фиксированного момента времени их корреляция между собой определяется матрицей (3.1.55). В результате алгоритм (3.1.48) может быть представлен в виде

$$\hat{W}(k+1) = \hat{W}(k) + \mu [-\bar{V}(k) + \Xi(k)], \quad (3.1.56)$$

или, после перехода к вектору $\hat{V}(k) = F^{-1}[\hat{W}(k) - W_0]$ [см. 3.1.41)],

$$\hat{V}(k+1) = \hat{V}(k) + \mu [-2\Lambda \hat{V}(k) + \Xi'(k)], \quad (3.1.57)$$

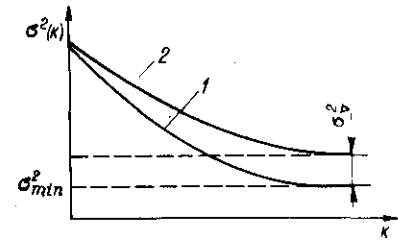


Рис. 3.5

где $\Xi'(k) = F^{-1}\Xi(k)$. Воспользовавшись преобразованием (3.1.39) и формулой (3.1.55), нетрудно показать, что

$$M \{ \Xi'(k) \Xi'^T(k) \} = 4\sigma_{\min}^2 \Lambda. \quad (3.1.58)$$

Корреляционная матрица шума градиента (3.1.58) позволяет найти корреляционные матрицы весовых коэффициентов $\hat{V}(k)$ и $\hat{W}(k)$. В работе [61] показано, что корреляционная матрица вектора $\hat{V}(k)$

$$M \{ \hat{V}(k) \hat{V}^T(k) \} = \mu \sigma_{\min}^2 (E - \mu \Lambda)^{-1} \approx \mu \sigma_{\min}^2 E, \quad (3.1.59)$$

где вторая часть формулы записана в предположении, что при малых μ можно принять $\mu \Lambda \ll E$. Таким образом, шумовые компоненты весового вектора $\hat{V}(k)$ имеют одинаковые дисперсии $\mu \sigma_{\min}^2$ и взаимно не коррелируемые составляющие. Шумовая составляющая весового вектора $\hat{W}(k)$, равная $\hat{W}(k) - W_0 = F \hat{V}(k)$, определяется корреляционной матрицей

$$M \{ [\hat{W}(k) - W_0][\hat{W}(k) - W_0]^T \} = M \{ F \hat{V}(k) \hat{V}^T(k) F^{-1} \} = \mu \sigma_{\min}^2 E \quad (3.1.60)$$

с теми же вероятностными характеристиками, что и для вектора $\hat{V}(k)$.

Шумовая составляющая весовых коэффициентов приводит к увеличению дисперсии ошибки σ^2 , причем, как следует из формулы (3.1.45), величина σ^2 случайна и ее среднее значение

$$M \{ \sigma^2(k) \} = \sigma_{\min}^2 + M \{ V^T(k) \Lambda V(k) \} = \sigma_{\min}^2 + \sigma_{\text{ш.а.}}^2, \quad (3.1.61)$$

где $\sigma_{\text{ш.а.}}^2$ называют избыточным значением дисперсии ошибки [66], обусловленным „разрегулированностью” весового вектора $\hat{W}(k)$ относительно оптимального вектора W_0 (шум адаптации). Используя формулу (3.1.59), из выражения (3.1.61) находим

$$\sigma_{\text{ш.а.}}^2 = \sum_{i=0}^I \lambda_i M \{ v_i^2(k) \} = \mu \sigma_{\min}^2 \sum_{i=0}^I \lambda_i = \mu \sigma_{\min}^2 \text{tr} R_{xx}. \quad (3.1.62)$$

В качестве меры разрегулированности весовых коэффициентов принимают [61] отношение

$$\sigma_{\text{ш.а.}}^2 / \sigma_{\min}^2 = \eta = \mu \text{tr} R_{xx}, \quad (3.1.63)$$

носящее название „коэффициент погрешности адаптации”. Так как, с одной стороны, $\eta = \mu \sum_{i=0}^I \lambda_i = \mu MN \bar{\lambda}$, где $\bar{\lambda} = (MN)^{-1} \sum_{i=0}^I \lambda_i$ — среднее собственное число, а с другой — на основе (3.1.53) $\bar{\lambda} \stackrel{i}{=} (\Delta^0 / 4\mu) (1/\theta)$, где $(1/\theta) = (MN)^{-1} \sum_{i=0}^I 1/\theta_i$ — средняя скорость адаптации, то связь между коэффициентом η , числом весовых коэффициентов MN и скоростью адаптации $(1/\theta)$ такова:

$$\eta = \Delta \frac{MN}{4} (1/\theta). \quad (3.1.64)$$

Если все собственные числа матрицы R_{xx} одинаковы и равны величине λ , то кривая обучения имеет одну постоянную θ , а поэтому [61] $\eta = MN\Delta/4\theta$. Так как переходный процесс в системе заканчивается за время $(4 \div 5)\theta$, то приближенно коэффициент погрешности адаптации равен числу весовых коэффициентов MN , деленному на число циклов адаптации $4\theta/\Delta$.

Рассмотренные выше основные результаты зависимости между скоростью адаптации и характеристиками эффективности адаптивных фильтров относятся к случаю стационарных входных процессов. Для таких процессов с ростом скорости адаптации (уменьшением числа циклов адаптации) шумы адаптации увеличиваются. При нестационарных входных процессах существует оптимальное значение скорости адаптации, обусловленное компромиссом между большой скоростью адаптации, обеспечивающей отслеживание временной нестационарности, и малой скоростью, отвечающей малой величине шума адаптации.

Рассмотрим теперь структурную схему адаптивной антенной системы, изображенную на рис. 3.3. Система включает в себя два основных функциональных блока: многомерный фильтр на ЛЗ с отводами и регулируемые весовыми коэффициентами, и устройство их вычисления, реализующее алгоритм (3.1.48). Входной информацией этого устройства служат вектор $X(t)$ [см. (3.1.20)], компонентами которого являются напряжения на отводах ЛЗ, и ошибка $\epsilon(t)$ [см. (3.1.30)]. Выходной информацией является вектор весов $\hat{W}(k)$ с MN компонентами $\hat{w}_{m,n}^*$, где $m=0, 1, \dots, M-1$ и $n=1, 2, \dots, N$. Как видно из алгоритма вычисления весовых коэффициентов, для работы системы не требуется иметь информацию о пространственных и временных характеристиках шума и локальных помех, однако нужно знать опорный сигнал, тождественный ожидаемому (обнаруживаемому) сигналу $s(t)$ [66].

В статье [16] показано, что использование опорного сигнала, совпадающего с истинным сигналом лишь с точностью до постоянного множителя, приводит к смещению вектора весовых коэффициентов. Поэтому в указанной работе предложен модифицированный вариант алгоритма, в соответствии с которым градиент [см. (3.1.36)] в отличие от алгоритма Уидроу (3.1.47) представляется в виде

$$\hat{V}(k) = 2 [u(k) X(k) - R_{xs}]. \quad (3.1.65)$$

Поэтому алгоритм (3.1.37) в варианте Гриффитса определяется выражением

$$\hat{W}(k+1) = \hat{W}(k) - 2\mu [u(k) X(k) - R_{xs}], \quad (3.1.66)$$

сочетающим алгоритмы [см. (3.1.37)] и [см. (3.1.47)], в которых используются средние характеристики и мгновенные значения входных процессов. Функциональная схема адаптивной антенной системы,

реализующей алгоритм определения весовых коэффициентов (3.1.66), аналогична приведенной на рис. 3.3, где лишь в блок вычисления весовых коэффициентов вместо ошибки $\epsilon(t)$ должна вводиться величина $u(t)$, а также задаваться составляющие вектора R_{xs} .

В заключение важно отметить следующее. Рассмотренные выше алгоритмы адаптивных антенных систем (3.1.48) и (3.1.66) обеспечивают сходимость к оптимальному весовому вектору W_0 (3.1.34), а поэтому в соответствии с выводами, сделанными из анализа соотношений (3.1.8), эти алгоритмы могут быть использованы для осуществления многомерного фильтра СПВО. Структурная схема СПВО, в которой используются адаптивные алгоритмы (3.1.48) или (3.1.66), отвечает в таком случае схеме СПВО, изображенной на рис. 2.20, и лишь должна быть дополнена блоком вычисления весовых коэффициентов, а ее алгоритм обработки [см. (2.5.20)] – соответственно алгоритмами (3.1.48) или (3.1.66).

Помехоустойчивость такой системы обнаружения многомерного сигнала, характеризующая ее выходным отношением с/ш Q , определяется формулой (2.5.24), где весовые коэффициенты $\hat{w}_{m,n}$ представляют собой компоненты вектора W_0 (3.1.34), оптимального для принятых значений параметров N и Δ фильтра на ЛЗ (нерекурсивного фильтра).

3.2. Алгоритм адаптивной оптимизации антенной системы, основанный на минимизации ее выходной мощности при сохранении желаемой частотной характеристики системы для заданного направления

В работе [71] предложен алгоритм, который обеспечивает решение задачи оптимальной пространственной фильтрации сигнала при априорном знании лишь направления его прихода и полосы частот. Этот алгоритм основан на минимизации мощности процесса на выходе сумматора многомерного фильтра при условии, что для направления прихода ожидаемого сигнала обеспечивается желаемая КЧХ антенной системы (система с линейным ограничением). Скалярный процесс, полученный на выходе сумматора многомерного фильтра в результате пространственной фильтрации сигнала, может быть далее использован для решения задач обнаружения и оценки параметров сигнала.

Алгоритм Фроста (так же как и алгоритмы Уидроу и Гриффитса) основан на решении соответствующей вариационной задачи конечно-разностным прямым методом. Причем заранее фиксируются длительность импульсной характеристики многомерного фильтра и число ее ординат (в терминах реализации фильтра на ЛЗ – число отводов и величина единичной задержки). Фиксация этих параметров до решения задачи синтеза снижает общность ее результатов. Поэтому для выявления потенциальных возможностей алгоритма пространственной фильтрации, синтезированного в работе [71], целесообразно, как и в предыдущем параграфе, рассмотреть вначале решение этой задачи в частотной области для многомерного фильтра с непрерывной импульсной характеристикой.

Минимизация выходной мощности многомерного фильтра с учетом ограничивающего условия (непрерывное время). Рассмотрим, как и выше, АР с M элементами, на выходах которых задан многомерный стационарный процесс $X(t) = X_s(t) + X_n(t)$, определяемый на элементах АР его матрицей ВСПМ $G_x(f) = G_s(f) + G_n(f)$ для сигнала и шума. Далее этот процесс обрабатывается многомерным фильтром с векторной КЧХ $\Phi(f)$, составляющие которого имеют скалярные КЧХ $\Phi_m(f)$ с $m=0, 1, \dots, M-1$ (схема фильтра аналогична изображенной на рис. 3.2, где обозначения $W_m(f)$ следует заменить на $\Phi_m(f)$). Задача заключается в минимизации функционала

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Phi}^T(f) G_x(f) \Phi(f) df. \quad (3.2.1)$$

при выполнении равенства

$$L_s^T(f) \Phi(f) = b(f), \quad (3.2.2)$$

где $b(f)$ – заданная КЧХ системы для направления a_s ожидаемого прихода сигнала, определяемого, как и выше [см. (2.1.3)], вектором волнового фронта $L_s(f)$. Условие физической возможности фильтра не выдвигается (способ перехода к физической возможности фильтра здесь тот же, что и рассмотренный в разд. 2.5 для оптимальной СПВО). Решение этой вариационной задачи с использованием множителей Лагранжа приводит к уравнению

$$\nabla_{\Phi} \left[\Phi^T(f) G_x(f) \Phi(f) + \lambda_1(f) \left\{ \frac{1}{2} [L_s^T(f) \Phi(f) + \bar{L}_s^T(f) \bar{\Phi}(f)] - \operatorname{Re} b(f) \right\} + \lambda_2(f) \left\{ \frac{1}{2j} [L_s^T(f) \Phi(f) - \bar{L}_s^T(f) \bar{\Phi}(f)] - \operatorname{Im} b(f) \right\} \right] = 0,$$

где условие задания желаемой КЧХ $b(f)$ записано отдельно для ее вещественной и мнимой частей, а поэтому используются два неопределенных вещественных множителя $\lambda_1(f)$ и $\lambda_2(f)$. Градиент ∇_{Φ} в этом выражении определяется аналогично градиенту в формуле (2.2.2), а его применение подобно выполненному при вычислении выражения (2.2.7). В результате получаем, что равенство градиента рассматриваемого функционала нулю приводит к уравнению

$$2G_x(f) \Phi(f) + [\lambda_1(f) - j\lambda_2(f)] \bar{L}_s(f) = 0.$$

Отсюда определяем

$$\Phi(f) = -\bar{\lambda}(f) G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f),$$

где $\lambda(f) = [\lambda_1(f) + j\lambda_2(f)]/2$. Неопределенный множитель $\bar{\lambda}(f)$ следует из условия выполнения равенства (3.2.2):

$$\bar{\lambda}(f) = -b(f) / L_s^T(f) G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f).$$

Подставив выражение для $\bar{\lambda}(f)$ в предыдущую формулу, окончательно находим оптимальную КЧХ $\Phi(f)$ многомерного фильтра, минимизирующего выходную мощность σ_y^2 при обеспечении заданной КЧХ $b(f)$ в направлении прихода сигнала:

$$\Phi(f) = \frac{b(f)}{L_s^T(f)G_x^{-1}(f)\bar{L}_s(f)} G_x^{-1}(f)\bar{L}_s(f). \quad (3.2.3)$$

Легко убедиться, что полученное выражение удовлетворяет условию (3.2.2). Если сигнал плосковолновой [см. (2.1.3)], то в результате применения тождества (2.1.5) находим

$$\begin{aligned} G_x^{-1}(f)\bar{L}_s(f) &= [G_n(f) + G_s(f)]^{-1}\bar{L}_s(f) = \\ &= N^{-1}(f)\bar{L}_s(f)[g_n(f) + g_s(f)L_s^T(f)N^{-1}(f)\bar{L}_s(f)]^{-1}, \end{aligned}$$

и поэтому из формулы (3.2.3) получаем

$$\Phi(f) = \frac{b(f)}{L_s^T(f)N^{-1}(f)\bar{L}_s(f)} N^{-1}(f)\bar{L}_s(f). \quad (3.2.4)$$

Интересно отметить, что выражение (3.2.4) следует сразу же из решения рассматриваемой задачи, если полагать, что требуется минимизировать выходную мощность, обусловленную лишь шумом, т. е. в (3.2.1) заменить матрицу $G_x(f)$ на матрицу $G_n(f) = g_n(f)N(f)$ (2.1.3).

Сравним между собой формулы (3.2.3) и (2.1.39). В результате находим, что

$$h(f)H(f) = \nu(f)\Phi(f), \quad (3.2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \nu(f) &= \frac{L_s^T(f)G_n^{-1}(f)\bar{L}_s(f)}{b(f)} \sqrt{\frac{g_s(f)}{1 + g_s(f)L_s^T(f)G_n^{-1}(f)\bar{L}_s(f)}} \approx \\ &\approx \frac{L_s^T(f)G_n^{-1}(f)\bar{L}_s(f)}{b(f)} \sqrt{g_s(f)} \end{aligned}$$

[приближенное выражение $\nu(f)$ записано для случая малого входного отношения с/ш]. Таким образом, КЧХ оптимальной СПВО, равная произведению $h(f)H(f)$, лишь скалярным множителем $\nu(f)$ отличается от КЧХ $\Phi(f)$. Следовательно, для реализации оптимальной СПВО можно использовать не только многомерный фильтр с КЧХ $H(f)$, но также и многомерный фильтр с КЧХ $\Phi(f)$ (3.2.3) дополненный скалярным фильтром с КЧХ $\nu(f)$ [см. (3.2.5)]. В результате, как будет видно далее, появляется возможность использовать для адаптивной оптимизации в составе СПВО многомерный фильтр, реализующий алгоритм Фроста [71].

Уточним величины, определяющие КЧХ $\nu(f)$, и возможности их задания. Так, спектр сигнала $g_s(f)$ должен задаваться так же, как и в

оптимальных системах обнаружения скалярного сигнала; $b(f)$ является заданной КЧХ системы [см. (3.2.2)] для направления ожидаемого прихода сигнала. Эрмитова форма, входящая в выражение $\nu(f)$ [см. (3.2.5)], есть величина, определяемая спектром шума на выходе многомерного фильтра с векторной КЧХ $\Phi(f)$. Действительно, используя выражение (3.2.4) для КЧХ $\Phi(f)$, находим спектр шума

$$g_\Phi(f) = \bar{\Phi}^T(f)G_n(f)\Phi(f) = \frac{|b(f)|^2}{L_s^T(f)G_n^{-1}(f)\bar{L}_s(f)}. \quad (3.2.6)$$

Из сравнения этого выражения с формулой (3.2.5) следует, что при малом входном отношении с/ш

$$|\nu(f)| = \frac{|b(f)|}{g_\Phi(f)} \sqrt{g_s(f)} = \frac{\sqrt{g_s(f)}|b(f)|^2}{g_\Phi(f)}. \quad (3.2.7)$$

Нетрудно видеть, что КЧХ $\nu(f)$ отвечает оптимальному послесумматорному фильтру [типа фильтра с КЧХ, описанного выражением (2.2.33)], где $g_s(f)|b(f)|^2$ есть спектр сигнала на входе фильтра, а $g_\Phi(f)$ — спектр шума в этой же точке. Получить спектр лишь шума на практике затруднительно. В частности, для задач обнаружения ситуации H_0 и H_1 априори обычно не различимы, однако при малом входном отношении с/ш приближенно можно считать [9], что $G_x(f) = G_n(f) + G_s(f) \approx G_n(f)$, и в таком случае спектр процесса на выходе многомерного фильтра

$$g_\Phi(f) = \bar{\Phi}^T(f)G_x(f)\Phi(f) \approx \bar{\Phi}^T(f)G_n(f)\Phi(f), \quad (3.2.8)$$

определяется в основном шумом и может быть измерен. Если ситуации H_0 и H_1 могут быть отличимы, то существует возможность [55] адаптивной реализации фильтра с КЧХ типа $\nu(f)$.

Схема СПВО, отвечающая настоящему варианту, точно та же, что и на рис. 3.2, лишь КЧХ многомерного фильтра $W(f)$ должна быть заменена на $\Phi(f)$ [см. (3.2.4)], а КЧХ скалярного фильтра — на $\nu(f)$ [см. (3.2.7)].

Возможность использования многомерного фильтра с КЧХ $\Phi(f)$ в оптимальной СПВО обусловлена фактически тем обстоятельством, что он позволяет получить оптимальную оценку плосковолнового сигнала. Действительно, из сравнения формулы (3.1.10) для изображения оптимальной оценки сигнала $U_s^\wedge(f)$ и формулы (3.2.4) для КЧХ $\Phi(f)$ следует, что

$$U_s^\wedge(f) = g_s(f) \frac{L_s^T(f)G_n^{-1}(f)\bar{L}_s(f)}{b(f)} X^T(f)\Phi(f). \quad (3.2.9)$$

Таким образом, использование многомерного фильтра с КЧХ $\Phi(f)$ позволяет получить оценку плосковолнового сигнала, подобно тому, как это осуществляется фильтром с КЧХ $W(f)$ [см. (3.1.7)]. Тем самым реализуется первая ступень алгоритма (2.1.40) оптимальной СПВО —

пространственная фильтрация, что в основном варианте СПВО выполняется с помощью многомерного фильтра с КЧХ $H(f)$ [см. (2.1.39)]. Второй ступени алгоритма СПВО – временной обработке с помощью скалярного фильтра с КЧХ $h(f)$ [см. (2.1.39)] – соответствует фильтр $v(f)$ КЧХ которого определяется формулами (3.1.8) или (3.2.5) в зависимости от того, используется ли многомерный фильтр с КЧХ $W(f)$ или $\Phi(f)$.

Минимизация выходной мощности многомерного фильтра с учетом ограничивающего условия (дискретное время). Положим, как и в разд. 3.1, что АР имеет M элементов, на выходах каждого из которых реализован фильтр на ЛЗ с N отводами и MN регулируемыми весовыми коэффициентами, для которых сохраним обозначение w_{mn} , где $m = 0, 1, \dots, M-1$ и $n = 1, 2, \dots, N$.

Положим, что на вход АР поступает аддитивная смесь сигнала, шума и локальной помехи, каждая из которых описывается на выходах отводов ЛЗ векторами [см. (3.1.22) – (3.1.24)], а их корреляционные матрицы – выражениями (3.1.26) – (3.1.28). Нумерация компонент MN -мерных векторов здесь та же, что и в предыдущем параграфе, $-i = 0, 1, \dots, I = MN - 1$ (при фиксированном значении переменной n полный перебор по m). Выходом многомерного фильтра является скалярный процесс $u(t)$ [см. (3.1.21)]. Его мощность

$$\sigma^2 = M \{u^2(t)\} = M \{W^T X(t) X^T(t) W\} = W^T R_{xx} W, \quad (3.2.10)$$

где W – MN -мерный вектор (3.1.19), а матрица R_{xx} следует из выражения (3.1.29) при $\tau = 0$.

Определим теперь ограничивающее условие во временной области, которое должно следовать из соответствующего условия (3.2.2), заданного выше в частотной области. Импульсная характеристика $\beta(t)$, отвечающая во временной области заданной КЧХ $b(f)$, находится с помощью обратного Фурье-преобразования изображения $b(f)$, т. е. $\beta(t) = \mathcal{F}^{-1}\{b(f)\}$. Длительность импульсной характеристики многомерного фильтра, реализуемого на ЛЗ, равна величине $N\Delta$. Поэтому импульсная функция $\beta(t)$ должна иметь ту же длительность и в дискретном варианте определяться N ординатами, взятыми с шагом Δ (полагаем, что N – четное число). Наиболее простой способ получения этих ординат заключается в следующем: 1) на интервале времени $t \in (-N\Delta/2, N\Delta/2)$ берутся N значений функции $\beta(t)$ в точках $t = (n + 1/2)\Delta$, где $n = -N/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2 - 1$, т. е. $\beta_n = \beta[(n + 1/2)\Delta]$; 2) для уменьшения эффекта, вызываемого усечением функции $\beta(t)$ и приводящего к явлению Гиббса, последовательность β_n взвешивается с помощью какого-либо окна ω_n ; 3) полученная дискретная последовательность $\beta_n \omega_n$ сдвигается на $N/2 + 1$ дискрет вправо, что приводит к фильтру, являющемуся физически возможной динамической системой и определяемому импульсной характеристикой

$$\beta_n^* = \beta_{n - N/2 - 1} \omega_{n - N/2 - 1}. \quad (3.2.11)$$

Далее этот способ определения величин β_n^* будет проиллюстрирован простым примером, а теперь целесообразно завершить формулировку ограничивающего условия во временной области.

Дискретному фильтру с импульсной характеристикой β_n^* отвечает КЧХ

$$\hat{b}(f) = \sum_{n=1}^N \beta_n^* e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n}, \quad (3.2.12)$$

которая в силу усечения, дискретизации и сглаживания функции $\beta(t)$ отличается от заданной КЧХ $b(f)$. Так как многомерный фильтр с векторной КЧХ $\Phi(f)$ на совокупности ЛЗ реализуется лишь приближенно, то, аналогично (2.5.18), его компоненты будут иметь КЧХ

$$\Phi_m^*(f) = \sum_{n=1}^N w_{mn}^* e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n}. \quad (3.2.13)$$

Далее, для упрощения выводов, положим, что плосковолновый сигнал предварительно скомпенсирован. В этом случае в условии (3.2.2) $L_s(f) = I$, где I – вектор из M единиц, а само условие (3.2.2), записанное в развернутом виде, таково:

$$I^T \Phi(f) = \sum_{m=0}^{M-1} \Phi_m(f) = b(f).$$

Для дискретного многомерного фильтра с векторной КЧХ $\Phi^*(f)$, определяемой ее компонентами (3.2.13), из выражений (3.2.12) и (3.2.13) следует

$$\sum_{m=0}^{M-1} \Phi_m^*(f) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} w_{mn}^* e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n} = \hat{b}(f) = \sum_{n=1}^N \beta_n^* e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n}.$$

Отсюда получаем выражение для ограничивающего условия во временной области

$$\sum_{m=0}^{M-1} w_{mn}^* = \beta_n^*, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.2.14)$$

Таким образом, обеспечение заданной КЧХ $b(f)$ во временной области [реально это КЧХ $\hat{b}(f)$, являющаяся приближением к $b(f)$], свелось к требованию равенства суммы весовых коэффициентов w_{mn} для фиксированного n -го временного отвода соответствующему значению импульсной характеристики β_n^* . Графически условие (3.2.14) иллюстрируется рис. 3.6, где в нижней его части приведена схема одноканальной системы на ЛЗ, имеющая импульсную дискретную характеристику β_n^* , где $n = 1, 2, \dots, N$.

Запишем условие (3.2.14) с учетом обозначения (3.1.19) вектора W :

$$C^T W = B, \quad (3.2.15)$$

где B – N -мерный вектор с составляющими β_n^* ; C – матрица размером $MN \times N$, образованная N векторами C_n с MN компонентами вида

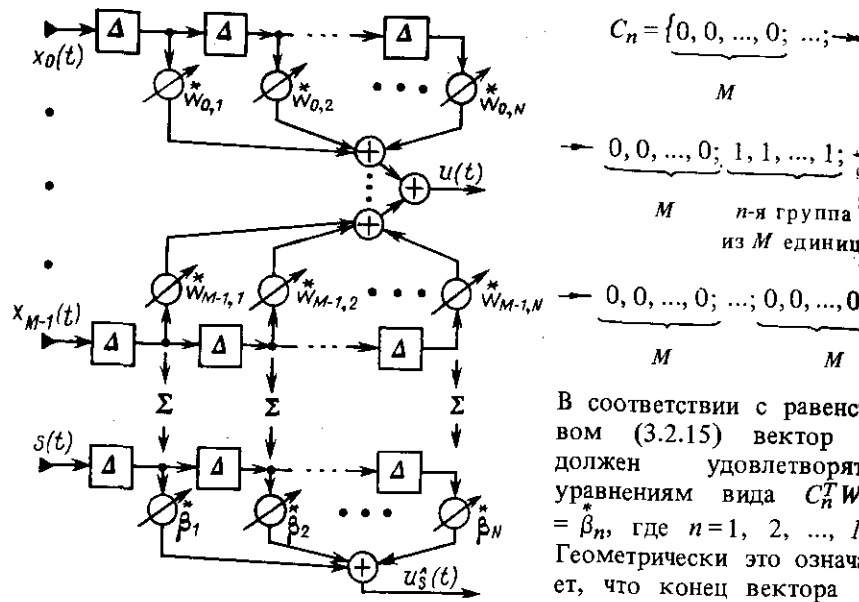


Рис. 3.6

скорости ограничений Λ , определяемой уравнением $C^T W = B$. Таким образом, Λ есть множество векторов W , таких, что $\Lambda = \{W : C^T W = B\}$. Ранг матрицы C равен N .

Теперь может быть сформулирована математически задача минимизации выходной мощности дискретного многомерного фильтра с учетом линейного ограничения его весовых коэффициентов: найдем вектор W_0 , минимизирующий квадратичную форму (3.2.10) при условии выполнения ограничения (3.2.15), т. е.

$$W^T R_{xx} W \rightarrow \min_W \text{ при } C^T W = B.$$

Условный минимум квадратичной функции (3.2.10) MN переменных W_{mn} находится путем введения MN -мерного вектора λ множителей Лагранжа и образования скалярной функции вектора W

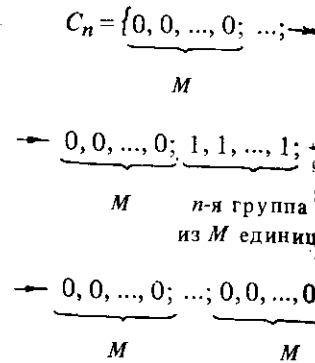
$$f(W) = \frac{1}{2} W^T R_{xx} W + \lambda^T (C^T W - B), \quad (3.2.16)$$

где, в связи с тем что множитель λ является неопределенным, для удобства дальнейших выкладок введен коэффициент $1/2$. Вычислив градиент ∇_W функции $f(W)$ и приравняв его нулю, находим уравнение для определения оптимального вектора W_0

$$\nabla_W f(W) = R_{xx} W + C \lambda = 0, \quad (3.2.17)$$

из которого

$$W_0 = -R_{xx}^{-1} C \lambda. \quad (3.2.18)$$



В соответствии с равенством (3.2.15) вектор должен удовлетворять уравнениям вида $C_n^T W = \beta_n$, где $n=1, 2, \dots, N$. Геометрически это означает, что конец вектора W должен находиться на $(M-1)N$ -мерной гиперплоскости

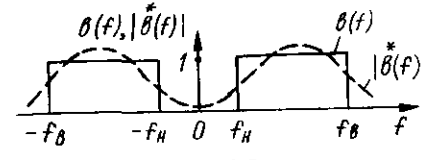


Рис. 3.7

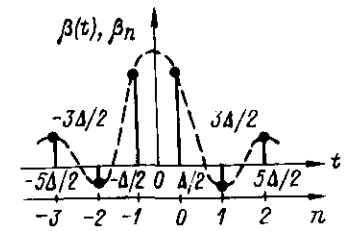


Рис. 3.8

Так как вектор W_0 должен также удовлетворять ограничению (3.2.15), т. е. $C^T W_0 = B = -C^T R_{xx}^{-1} C \lambda$, то вектор $\lambda = -(C^T R_{xx}^{-1} C)^{-1} B$, а поэтому окончательно из выражения (3.2.18) получаем

$$W_0 = R_{xx}^{-1} C (C^T R_{xx}^{-1} C)^{-1} B. \quad (3.2.19)$$

Оптимальная оценка выхода системы следует из выражения (3.1.21), определяющего алгоритм обработки:

$$\hat{u}(t) = X^T(t) W_0. \quad (3.2.20)$$

Достижимое при этом минимальное значение выходной мощности

$$\sigma_{\min}^2 = M \{ \hat{u}^2(t) \} = W_0^T R_{xx} W_0 = B^T (C^T R_{xx}^{-1} C)^{-1} B. \quad (3.2.21)$$

Рассмотрим в заключение пример определения коэффициентов β_n [см. (3.2.11)]. Положим, что в качестве желаемой КЧХ системы $b(f)$, отвечающей ожидаемому направлению прихода сигнала, принята КЧХ идеального полосового прямоугольного фильтра с граничными частотами f_H и f_B , изображенная на рис. 3.7 сплошной линией. В таком случае

$$\beta(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ b(f) \} = 2 \frac{\sin [\pi (f_B - f_H) t]}{\pi t} \cos [\pi (f_H + f_B) t]. \quad (3.2.22)$$

В соответствии с изложенным выше при $t = (n+1/2)\Delta$ и $\Delta \leq 1/2f_B$ находим

$$\beta_n = 2 \frac{\sin [\pi (f_B - f_H) (n+1/2)\Delta]}{\pi (n+1/2)\Delta} \cos [\pi (f_H + f_B) (n+1/2)\Delta], \quad (3.2.23)$$

где $n = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2-1$ (зависимости $\beta(t)$ и β_n иллюстрируются рис. 3.8 для $N=6$). Таким образом, последовательность β_n , определенная выражением (3.2.23) для любых n , усечена так, что вне интервала $t \in (-N\Delta/2, N\Delta/2)$ она тождественно равна нулю. Для сглаживания усеченной последовательности воспользуемся окном Хэмминга [54]



Рис. 3.9

$$\omega_n = 0,54 + 0,46 \cos [2\pi(n + 1/2)/N], \quad (3.2.24)$$

где значения n те же, что и выше (вид зависимости ω_n показан на рис. 3.9). Произведение $\beta_n \omega_n$ образует сглаженную последовательность, из которой в соответствии с формулой (3.2.11) следует дискретная импульсная характеристика β_n^* , определяющая правую часть ограничивающего условия (3.2.15) и отвечающая физически возможному дискретному фильтру (примерный вид последовательности β_n^* для $n=1, 2, \dots, 6$ показан на рис. 3.10). Импульсной характеристике β_n^* отвечает КЧХ $\hat{b}(f)$ [см. (3.2.12)], которая отлична от исходной КЧХ $b(f)$ идеального полового фильтра. Их близость может быть оценена путем вычисления $|\hat{b}(f)|$ и сравнения с $b(f)$. Если последовательность β_n^* обладает симметрией, т. е. $\beta_{N/2+1-n}^* = \beta_{n+N/2}^*$, а центр симметрии есть точка $(N+1)/2$ (так, для $N=6$ это $n=3,5$), то расчет модуля КЧХ $\hat{b}(f)$ можно выполнить, используя лишь половину ординат β_n^* для $n=1, 2, \dots, N/2$, по формуле

$$|\hat{b}(f)| = \left| \sum_{n=1}^N \beta_n^* e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n} \right| = 2 \left| \sum_{n=1}^{N/2} \beta_{N/2+n}^* \cos [2\pi f \Delta (n - 1/2)] \right|. \quad (3.2.25)$$

Примерный вид зависимости $|\hat{b}(f)|$ показан на рис. 3.7 пунктиром.

Определение оптимальных весовых коэффициентов методом наискорейшего спуска. Оптимальный вектор весовых коэффициентов [см. (3.2.19)] может быть найден не только путем выполнения обращения матриц, но и методом наискорейшего (градиентного) спуска. Используя выражение (3.2.17) для градиента, аналогичного выражению (3.1.37), можем записать

$$W(k+1) = W(k) - \mu \nabla_w f(W) = W(k) - \mu [R_{xx} W(k) + C \lambda(k)],$$

где k – номер шага итераций; μ – его величина [от номера итераций зависит не только вектор весов $W(k)$, но и вектор неопределенных множителей Лагранжа $\lambda(k)$]. Вектор $W(k+1)$ должен удовлетворять ограничению (3.2.15), т. е.

$$B = C^T W(k+1) = C^T W(k) - \mu C^T [R_{xx} W(k) + C \lambda(k)].$$

Определив отсюда вектор $\lambda(k)$ и подставив его в предыдущее выражение, находим

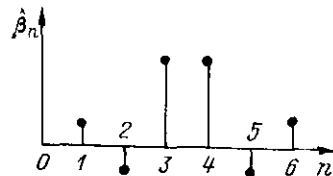


Рис. 3.10

$$W(k+1) = W(k) - \mu [E - C(C^T C)^{-1} C^T] R_{xx} W(k) + C(C^T C)^{-1} [B - C^T W(k)], \quad (3.2.26)$$

где начальное значение весового вектора $W(0) = C(C^T C)^{-1} B$ удовлетворяет ограничению (3.2.15) (проверяется путем умножения обеих частей этого равенства слева на матрицу C^T). Член $[B - C^T W(k)]$, входящий в последнее слагаемое алгоритма (3.2.26), равен нулю лишь при точном удовлетворении ограничения после выполнения k -й итерации [вычисления вектора $W(k)$]. Это обстоятельство имеет принципиальное значение и позволяет предотвратить накопление ошибок вычисления весового вектора. Для более компактной записи алгоритма (3.2.26) введем следующие обозначения:

$$A = C(C^T C)^{-1} B; \quad P = E - C(C^T C)^{-1} C^T, \quad (3.2.27)$$

где A – MN -мерный вектор, а P – $MN \times MN$ -матрица. Тогда алгоритм (3.2.26) принимает вид

$$W(k+1) = P [W(k) - \mu R_{xx} W(k)] + A. \quad (3.2.28)$$

Адаптивные варианты этих алгоритмов находят путем замены матрицы R_{xx} на ее оценку $X(k)X^T(k)$ [см. (3.1.46)], в результате чего из (3.2.26) и (3.2.28) соответственно получаем

$$\hat{W}(k+1) = \hat{W}(k) - \mu u(k) [X(k) - C(C^T C)^{-1} C^T X(k)] + C(C^T C)^{-1} [B - C^T \hat{W}(k)]; \quad (3.2.29)$$

$$\hat{W}(k+1) = P [\hat{W}(k) - \mu u(k) X(k)] + A, \quad (3.2.30)$$

где величина $u(k)$ определяется выражением (3.1.21) при $t = k \Delta$.

Алгоритмы (3.2.29) и (3.2.30) удовлетворяют ограничению $C^T W(k+1) = B$ на каждом шаге итераций. В этом нетрудно убедиться, если обе их части умножить на C^T и учесть, что в соответствии с равенствами (3.2.27) справедливы выражения $PW = W - A$ и $C^T P = 0$.

Из алгоритмов (3.2.29) и (3.2.30) видно, что для их реализации необходимо измерять компоненты вектора $X(k)$ (напряжения на отводах ЛЗ) и выходной эффект многомерного фильтра $u(k)$. Предварительно должен быть вычислен вектор ограничений B с составляющими β_n для $n=1, 2, \dots, N$. Оба алгоритма могут быть записаны в развернутом виде. Сделаем это для варианта (3.2.29), нагляднее отражающего суть вычислений. В результате получаем выражение

$$\hat{w}_{mn}(k+1) = \hat{w}_{mn}(k) - \mu u(k) \left[x_{mn}(k) - \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{in}(k) \right] + \frac{1}{M} \left[\beta_n - \sum_{i=0}^{M-1} \hat{w}_{in}(k) \right], \quad (3.2.31)$$

определяющее при $m=0, 1, \dots, M-1$ и $n=1, 2, \dots, N$ все MN компоненты вектора $W(k+1)$. Проанализируем итерационную процедуру вычисления весовых коэффициентов, представив выражение (3.2.3) в виде следующих вычислительных блоков:

$$1) \dot{w}'_{in}(k) = \dot{w}_{in}(k) - \mu u(k)x_{in}(k), \quad i=0, 1, \dots, M-1;$$

$$2) \dot{w}''_n(k) = \sum_{i=0}^{M-1} \dot{w}'_{in}(k);$$

$$3) \dot{w}_{mn}(k+1) = \dot{w}'_{mn}(k) + \frac{1}{M} [\dot{\beta}_n - \dot{w}''_n(k)], \quad m=0, 1, \dots, M-1.$$

На первом этапе вычисляются M промежуточных величин $\dot{w}'_{in}(k)$ для фиксированного n -го временного сечения (отвода); все они запоминаются. На втором этапе определяется промежуточная величина $\dot{w}''_n(k)$, являющаяся суммой всех M величин $\dot{w}'_{in}(k)$. На третьем, завершающем, этапе находятся M весовых коэффициентов $\dot{w}_{mn}(k+1)$, определяемых M промежуточными величинами $\dot{w}'_{in}(k)$, величиной их суммы $\dot{w}''_n(k)$, а также параметром ограничения $\dot{\beta}_n$. Эти три вычислительных этапа повторяются для каждого $n=1, 2, \dots, N$, т. е. N раз. Из анализа этой процедуры видно, что основной трудоемкой операцией является умножение, которое на каждом шаге итеративной процедуры должно быть выполнено MN раз — одно умножение приходится на один коэффициент. Точно то же и для алгоритмов (3.1.48) и (3.1.66), рассмотренных в предыдущем параграфе, — в первом случае производят умножение составляющих MN -мерного вектора $X(k)$ на скаляр $\epsilon(k)$, а во втором — на скаляр $u(k)$ [в случае алгоритма (3.2.31) это менее очевидно].

Функциональная схема ААС, реализующей алгоритм (3.2.31), аналогична приведенной выше на рис. 3.3, где лишь в блок вычисления весовых коэффициентов вместо ошибки $\epsilon(t)$ должна вводиться величина $u(t)$, а также задаваться составляющие $\dot{\beta}_n$ вектора ограничений B . Отметим, что все три рассмотренных выше алгоритма ААС — Уидроу (3.1.48), Гриффитса (3.1.66) и Фроста (3.2.31) основаны на вычислении MN корреляционных моментов между напряжениями $x_{mn}(k)$ на отводах ЛЗ и ошибкой $\epsilon(k)$ в первом алгоритме и между теми же напряжениями и выходной величиной $u(k)$ в двух других, т. е. вычислении произведений $x_{mn}(k)\epsilon(k)$ и $x_{mn}(k)u(k)$. Именно с помощью этих корреляционных моментов и осуществляется адаптивное измерение пространственно-временной корреляционной функции (матрицы корреляций) суммарного поля сигнала, шума и помех необходимой для оптимизации процедуры пространственно-временной обработки.

Свойства и особенности адаптивного алгоритма минимизации выходной мощности при линейном ограничении. Условия сходимости алгоритма (3.2.30) [или (3.2.29), что одно и то же] доказываются аналогично тому, как это было сделано для алгоритма (3.1.48), минимизирующего дисперсию оценки сигнала. Полагая входные процессы $X(k)$ и $X(k+1)$ некоррелированными, из выражения (3.2.30) находим

$$M \{ \hat{W}(k+1) \} = P \{ M \{ \hat{W}(k) \} - \mu R_{xx} M \{ \hat{W}(k) \} \} + A. \quad (3.2.32)$$

Введем далее вектор $W'(k) = M \{ \hat{W}(k) \} - W_0$ и учтем непосредственно проверяемые равенства $A = (E - P)W_0$ и $PR_{xx}W_0 = 0$. В результате из (3.2.32) находим

$$W'(k+1) = P W'(k) - \mu PR_{xx} W'(k). \quad (3.2.33)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что матрица P [см. (3.2.27)] идемпотентна, т. е. $P^2 = P$. Умножая обе части равенства (3.2.33) слева на P , убеждаемся, что $P W'(k) = W'(k)$ для любых k , поэтому это выражение можно записать в виде, аналогичном (3.1.49),

$$W'(k+1) = [E - \mu PR_{xx} P] W'(k) = [E - \mu PR_{xx} P]^{k+1} W'(0).$$

В работе [71] отмечается, что матрица $PR_{xx}P$ имеет N нулевых собственных значений и $(M-1)N$ ненулевых собственных значений ν_i , заключенных между наименьшим и наибольшим собственными значениями λ_{\min} и λ_{\max} матрицы R_{xx} , т. е. $\lambda_{\min} \leq \nu_{\min} \leq \nu_i \leq \nu_{\max} \leq \lambda_{\max}$, где $i=1, 2, \dots, (M-1)N$, а ν_{\min} и ν_{\max} — наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $PR_{xx}P$. Если, аналогично (3.1.39), выполнить преобразование подобия матрицы $PR_{xx}P$, а затем, как и в (3.1.41), перейти к векторам $V(k) = F^{-1} W'(k)$, то получаем, что процесс сходимости i -й компоненты вектора $V(k)$ определяется постоянной времени $\tau_i \approx \Delta / \mu \nu_i$, а условием сходимости вектора $V(k)$ является выполнение неравенства $0 < \mu < 1/\nu_{\max}$.

Алгоритм (3.2.30) обладает способностью самокорректировки ошибок, возникающих в процессе вычисления весовых коэффициентов. Это удобно проиллюстрировать геометрически с помощью рис. 3.11. Здесь точка 0 отвечает началу координат линейного пространства векторов с MN составляющими. На этом же рисунке условно показаны $(M-1)N$ -мерная гиперплоскость $\Lambda = \{W: C^T W = B\}$ и параллельная ей гиперплоскость той же размерности $\Sigma = \{W: C^T W = 0\}$, проходящая через начало координат. Вектор A [см. (3.2.27)] ортогонален гиперплоскости Λ и оканчивается на ней. Матрица P [см. (3.2.27)] отвечает оператору проектирования MN -мерного вектора на $(M-1)N$ -мерную гиперплоскость Σ , поэтому умножение любого вектора на матрицу P переводит этот вектор в указанную проекцию. Все исходные величины, введенные на рис. 3.11,

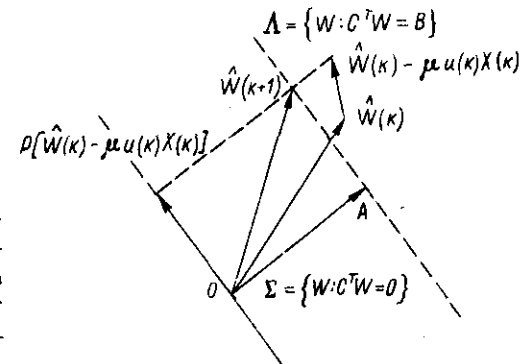


Рис. 3.11

определены, а значит, можно рассмотреть работу алгоритма (3.2.30). Положим, что вектор $W(k)$, полученный на предыдущем k -м шаге, не удовлетворяет ограничению (3.2.15) вследствие ошибок, имевших место при его вычислении на этом шаге и обусловленных конечной разрядностью арифметических устройств. На рис. 3.11 это показано с помощью вектора $\hat{W}(k)$, не удовлетворяющего ограничению и оканчивающегося вне гиперплоскости Λ . Разностный вектор $[\hat{W}(k) - \mu u(k)X(k)]$ в соответствии с (3.2.30) отвечает вычислению весового вектора на $k+1$ -м шаге без учета ограничений, а вектор $P[\hat{W}(k) - \mu u(k)X(k)]$ есть проекция разностного вектора на гиперплоскость Σ . Сложение этой проекции с вектором A приводит к новому весовому вектору $\hat{W}(k+1)$, который будет удовлетворять ограничению (3.2.15) с точностью, обусловленной ошибками лишь на данном $k+1$ -м шаге. Таким образом, ошибки вычисления весового вектора в процессе реализации итерационной процедуры (3.2.30) не накапливаются, что является существенным преимуществом этого алгоритма перед адаптивными алгоритмами, рассмотренными в предыдущем параграфе.

В соответствии с выше изложенным и выражением (3.2.5) алгоритм минимизации выходной мощности многомерного фильтра с линейным ограничением (3.2.31) может быть использован для многомерного фильтра СПВО, а алгоритм (3.2.7) – для КЧХ ее скалярного послесумматорного фильтра.

Структурная схема СПВО в рассматриваемом варианте отвечает схеме, изображенной на рис. 2.20, где лишь следует обозначения $\hat{W}_m(f)$ заменить на $\hat{\Phi}_m(f)$, а также добавить блок вычисления весовых коэффициентов. Соответственно алгоритм обработки (2.5.20) должен быть дополнен алгоритмом (3.2.31). Помехоустойчивость СПВО в этом варианте определяется выходным отношением с/ш \hat{Q} [см. (2.5.24)], где весовые коэффициенты \hat{W}_{mn} представляют собой компоненты вектора W_0 [см. (3.2.19)], оптимального для принятых параметров N и Δ .

3.3. Влияние факторов, связанных с условиями функционирования системы пространственно-временной обработки, на ее эффективность

Характеристики многомерного фильтра при угловом рассогласовании направлений ожидаемого и фактического прихода сигнала. При работе СПВО возможна ситуация, когда направления ожидаемого и фактического прихода сигнала не совпадают. Вместе с тем КЧХ $H(f)$ [см. (2.1.9)] многомерного фильтра оптимальной СПВО, а также КЧХ его адаптивных вариантов $W(f)$ [см. (3.1.7)] и $\Phi(f)$ [см. (3.2.3)] используют информацию об ожидаемом направлении прихода сигнала, определяемом вектором $L_s(f)$ [см. (2.1.3)]. Поэтому интересно исследовать, как влияет на эффективность СПВО указанное рассогласование направлений при различных вариантах КЧХ многомерного фильтра.

Рассмотрим три варианта многомерных фильтров: традиционное УФХН с единичным амплитудным распределением; фильтр, осуществляющий оптимальную пространственную фильтрацию с КЧХ $H(f)$ [см. (2.1.9)] [или $W(f)$ [см. (3.1.7)], что эквивалентно]; фильтр, минимизирующий выходную мощность с учетом ограничения и описываемый КЧХ $\Phi(f)$ [см. (3.2.3)]. Будем рассматривать M элементную линейную АР, на вход которой поступает смесь плосковолнового сигнала, приходящего с направления α , определяемого вектором $L_\alpha(f)$, и шума. Их матрица ВСПМ определяется суммой

$$G_x(f) = G_s(f, \alpha) + G_n(f) = g_s(f) \bar{L}_\alpha(f) L_\alpha^T(f) + g_n(f) N(f), \quad (3.3.1)$$

где слагаемые $G_x(f)$ определяются аналогично (2.1.3). При исследовании чувствительности характеристик многомерных фильтров к рассогласованию направлений, определяемых вектором $L_s(f)$ для угла α_s и вектором $L_\alpha(f)$ для угла α , будем следовать основным положениям методики, изложенной в статье [89]. Чтобы можно было сравнивать между собой многомерные фильтры с указанными выше тремя КЧХ, выполним их нормировку, а именно примем

$$H_1(f) = (1/M) \bar{L}_s(f); \quad (3.3.2)$$

$$H_2(f) = \frac{H(f)}{L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)} = \frac{N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)}{L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f)}; \quad (3.3.3)$$

$$H_3(f) = \Phi(f) = \frac{G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f)}{L_s^T(f) G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f)}, \quad (3.3.4)$$

где, в связи с тем что далее будет рассматриваться фиксированная частота, в выражении $\Phi(f)$ [см. (3.2.3)] принято $b(f) = 1$. Из приведенных выражений видно, что в результате нормировки во всех случаях $L_s^T(f) H_i(f) = 1$ ($i = 1, 2, 3$). Сами нормирующие множители являются постоянными величинами, а поэтому на эффективность не влияют.

Эффективность каждого фильтра с КЧХ $H_i(f)$ будем оценивать с помощью отношения с/ш на его выходе

$$q_i(f) = \frac{\bar{H}_i^T(f) G_s(f, \alpha) H_i(f)}{\bar{H}_i^T(f) G_n(f) H_i(f)} = \frac{g_s(f) |L_\alpha^T(f) H_i(f)|^2}{g_n(f) \bar{H}_i^T(f) N(f) H_i(f)}, \quad (3.3.5)$$

где в отличие от отношения (2.2.1) направление прихода сигнала задается в общем случае вектором $L_\alpha(f)$, не совпадающим с вектором $L_s(f)$, входящим в каждую КЧХ $H_i(f)$. Другой, используемой далее характеристикой будет коэффициент усиления (КУ) АР

$$\chi_i(f) = \frac{q_i(f)}{g_s(f)/g_n(f)} = \frac{|L_\alpha^T(f) H_i(f)|^2}{\bar{H}_i^T(f) N(f) H_i(f)}, \quad (3.3.6)$$

характеризующий эффективность пространственной фильтрации сигнала многомерным фильтром с КЧХ $H_i(f)$. И наконец, будем рассматривать также спектральную плотность процесса на выходе сумматора многомерного фильтра с КЧХ $H_i(f)$

$$g_i(f) = \bar{H}_i^T(f) G_x(f) H_i(f) = \\ = g_s(f) |L_a^T(f) H_i(f)|^2 + g_n(f) \bar{H}_i^T(f) N(f) H_i(f). \quad (3.3.7)$$

Если шум не коррелирован, т. е. $N(f) = E$, а также фактическое и ожидаемое направления прихода сигнала совпадают между собой, т. е. $L_s(f) = L_a(f)$, то во всех трех случаях $\chi_i(f) = M$. Если $N(f) \neq E$, но $L_s(f) = L_a(f)$, то КУ $\chi_2(f)$ и $\chi_3(f)$ совпадают между собой и равны величине

$$\chi_{\max}(f) = L_a^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_a(f), \quad (3.3.8)$$

а выходное отношение с/ш [см. (3.3.5)] также равно максимальной величине

$$q_{\max} = [g_s(f)/g_n(f)] L_a^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_a(f). \quad (3.3.9)$$

Если же $L_s(f) \neq L_a(f)$, т. е. имеет место рассогласование направлений ожидаемого и фактического прихода сигнала, то все три варианта фильтров с КЧХ [см. (3.3.2 – (3.3.4)] имеют различную эффективность. Рассмотрим этот случай подробно. Предварительно введем следующие обозначения для эрмитовых и билинейной форм:

$$\kappa_a(f) = L_a^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_a(f); \quad (3.3.10)$$

$$\kappa_s(f) = L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f); \quad (3.3.11)$$

$$\kappa_{as}(f) = L_a^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f). \quad (3.3.12)$$

Кроме того, следуя работе [89], будем трактовать эти формы как скалярные произведения фигурирующих в них векторов, взятых с весом, определяемым матрицей $N^{-1}(f)$. Совокупность комплексных векторов (с такой метрикой) образует линейное M -мерное пространство $C(N^{-1})$, в котором нормы векторов $L_a(f)$ и $L_s(f)$ равны соответственно $\sqrt{\kappa_a(f)}$ и $\sqrt{\kappa_s(f)}$. В таком пространстве можно определить квадрат косинуса обобщенного угла между векторами $L_a(f)$ и $L_s(f)$

$$\cos^2(L_a, L_s; N^{-1}) = |\kappa_{as}(f)|^2 / \kappa_a(f) \kappa_s(f), \quad (3.3.13)$$

причем в соответствии с неравенством Коши–Буняковского $0 \leq \cos^2(L_a, L_s; N^{-1}) \leq 1$. Когда $\cos^2(L_a, L_s; N^{-1}) = 0$, то векторы L_a и L_s ортогональны, а когда $\cos^2(L_a, L_s; N^{-1}) = 1$, то они отличаются между собой лишь скалярным множителем. В соответствии со сказанным можно определить

$$\sin^2(L_a, L_s; N^{-1}) = 1 - \cos^2(L_a, L_s; N^{-1}). \quad (3.3.14)$$

Рассмотрим смысл метрики в пространстве $C(N^{-1})$. Для этого выполним преобразование подобия матрицы N . Обозначим через $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{M-1}$ ее M собственных чисел и через F_0, F_1, \dots, F_{M-1} соответствующие им собственные векторы. В таком случае для векторов L_a и L_s находим

$$L_a = \sum_{m=0}^{M-1} a_m F_m; \quad L_s = \sum_{m=0}^{M-1} b_m F_m,$$

где коэффициенты представления векторов L_a и L_s в базисе, образуемом собственными векторами F_m , есть $a_m = F_m^T L_a$ и $b_m = F_m^T L_s$. В результате для квадрата косинуса в соответствии с его определением [см. (3.3.13)] находим

$$\cos^2(L_a, L_s; N^{-1}) = \frac{|\sum_{m=0}^{M-1} a_m \bar{b}_m / \lambda_m|^2}{(\sum_{m=0}^{M-1} |a_m|^2 / \lambda_m) (\sum_{m=0}^{M-1} |b_m|^2 / \lambda_m)}. \quad (3.3.15)$$

Отсюда видно, что эффект взвешивания компонент a_m и b_m векторов L_a и L_s с весами, определяемыми свойствами матрицы шума N^{-1} , заключается в умножении каждой из этих компонент на величину $\sqrt{1/\lambda_m}$. В результате такого взвешивания усиливаются компоненты векторов L_a и L_s , соответствующие малым собственным числам, и ослабляются – отвечающие большим. Так как малым собственным числам матрицы N соответствуют компоненты с меньшей интенсивностью шума (малой спектральной плотностью), а большим – с большей его интенсивностью, то это и объясняет появление обратной матрицы N^{-1} в алгоритмах оптимальной обработки (см. разд. 2.2, где этот вопрос обсуждается с позиций пространственного и временного обеления поля шума). Если шум по пространству не коррелирован, т. е. $N = E$, то такого эффекта не возникает.

Эффективность антенной системы с различными многомерными фильтрами при угловом рассогласовании. Рассмотрим многомерный фильтр с КЧХ $H_i(f)$ [см. (3.3.2)], отвечающий традиционному УФХН. Из формул (3.3.6) и (3.3.2) находим

$$\chi_1 = |L_a^T \bar{L}_s|^2 / (L_s^T N \bar{L}_s) = M^2 \cos^2(L_a, L_s; E) / (L_s^T N \bar{L}_s). \quad (3.3.16)$$

Здесь и далее аргумент f опущен, так как рассматривается одна фиксированная частота. Если шум не коррелирован ($N = E$), то

$$\chi_1 = M \cos^2(L_a, L_s; E) = M R_{as}^2, \quad (3.3.17)$$

где R_{as}^2 – квадрат модуля ХН, ориентированной в направлении α_s для значения угла α [см. формулы (2.3.14) и (2.3.16)]. Для спектра (3.3.7) имеем

$$g_1 = g_s \cos^2(L_a, L_s; E) + (g_n / M^2) L_s^T N \bar{L}_s. \quad (3.3.18)$$

Из последнего выражения видно, что для УФХН сигнальная составляющая выходного спектра зависит от квадрата косинуса обобщенного угла между векторами L_a и L_s в пространстве $C(E)$ и не зависит от шума N . Для шумовой составляющей угловое рассогласование направлений приводит лишь к замене эрмитовой формы $L_a^T N \bar{L}_a$ на $L_s^T N \bar{L}_s$, соотношение между величинами которых и определяет влияние каждого из направлений.

Рассмотрим теперь многомерный фильтр с КЧХ $H_2(f)$ [см. (3.3.3)], используемый в оптимальной СПВО. Из формул (3.3.6) и (3.3.3) находим КУ в такой системе

$$\chi_2 = |L_a^T N^{-1} \bar{L}_s|^2 / (L_s^T N^{-1} \bar{L}_s) = \kappa_a \cos^2(L_a, L_s; N^{-1}). \quad (3.3.19)$$

Сравнение этого выражения с максимальным значением КУ χ_{\max} [см. (3.3.8)] показывает, что при отсутствии рассогласования векторов, когда $\cos^2(\dots) = 1$, $\chi_2 = \chi_{\max}$. Если такое рассогласование имеет место, то величина χ_2 зависит от квадрата косинуса обобщенного угла между векторами L_a и L_s в пространстве $C(N^{-1})$, где составляющие этих векторов берутся с весами [см. (3.3.15)], определяемыми обратной матрицей ВСПМ шума N^{-1} . Большая или меньшая чувствительность к рассогласованию в пространстве $C(N^{-1})$ по отношению к пространству $C(E)$ зависит от изменения метрики в окрестности вектора L_a . Например, если собственные величины N имеют существенный разброс и вектору L_a отвечают большие собственные значения, то фильтр с КЧХ $H_2(f)$ будет более чувствителен к угловому рассогласованию, чем традиционное УФХН с КЧХ $H_1(f)$, так как различие величин малых проекций векторов L_a и L_s на собственные векторы F_m , отвечающие малым собственным числам, будет подчеркиваться метрикой в пространстве $C(N^{-1})$.

Спектр процесса (3.3.7) на выходе фильтра с КЧХ $H_2(f)$ [см. (3.3.3)]

$$g_2 = g_s (\kappa_a / \kappa_s) \cos^2(L_a, L_s; N^{-1}) + g_n (1 / \kappa_s). \quad (3.3.20)$$

Из этого выражения видно, что сигнальная составляющая спектра g_2 зависит не только от величины $\cos^2(L_a, L_s; N^{-1})$, как в спектре g_1 [см. (3.3.18)], но также и от отношения квадратов норм κ_a и κ_s векторов L_a и L_s в пространстве $C(N^{-1})$.

Рассмотрим, наконец, свойства многомерного фильтра с КЧХ $H_3(f)$ [см. (3.3.4)], минимизирующего выходную мощность $H_3^T G_x H_3$ на фиксированной частоте при условии $L_s^T H_3 = 1$. Напомним, что $H_3(f) = \Phi(f)$, где $\Phi(f)$ определяется формулой (3.2.3) при $b(f) = 1$ [минимизация мощности в полосе частот (3.2.1) требует ее минимизации на каждой частоте, а поэтому $H_3(f) = \Phi(f)$].

Выражение для КУ χ_3 следует из формул (3.3.6) и (3.3.4):

$$\chi_3 = |L_a^T G_x^{-1} \bar{L}_s|^2 / (L_s^T G_x^{-1} N G_x^{-1} \bar{L}_s). \quad (3.3.21)$$

Определяющей величиной здесь является матрица G_x^{-1} , которую с учетом выражения (3.3.1) и тождества (2.1.5) запишем в следующем виде:

$$G_x^{-1} = (1/g_n) (N^{-1} - \gamma N^{-1} \bar{L}_a L_a^T N^{-1}); \quad \gamma = (g_s/g_n) / (1 + \kappa_a g_s/g_n). \quad (3.3.22)$$

Умножив матрицу G_x^{-1} слева и справа на векторы L_a^T и \bar{L}_s , находим числитель выражения (3.3.21)

$$|L_a^T G_x^{-1} \bar{L}_s|^2 = |\kappa_{as}|^2 [g_n (1 + \kappa_a g_s/g_n)]^{-2}. \quad (3.3.23)$$

При выводе этой формулы учтено, что $1 - \gamma \kappa_a = (1 + \kappa_a g_s/g_n)^{-1}$. Далее, используя формулу (3.3.22) и выполнив необходимые умножения, а также приведя подобные члены, находим знаменатель выражения (3.3.21)

$$\begin{aligned} L_s^T G_x^{-1} N G_x^{-1} L_s &= [\kappa_s + (2g_s/g_n + \kappa_a g_s^2/g_n^2) (\kappa_a \kappa_s - |\kappa_{as}|^2)] \times \\ &\times [g_n (1 + \kappa_a g_s/g_n)]^{-2}, \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

где учтено, что $\gamma (2 - \gamma \kappa_a) = (2g_s/g_n + \kappa_a g_s^2/g_n^2) \times (1 + \kappa_a g_s/g_n)^{-2}$. Из отношения последних выражений находим

$$\chi_3 = |\kappa_{as}|^2 / [\kappa_s + (2g_s/g_n + \kappa_a g_s^2/g_n^2) (\kappa_a \kappa_s - |\kappa_{as}|^2)]. \quad (3.3.25)$$

Разделив вначале числитель и знаменатель этого отношения на произведение $\kappa_a \kappa_s$, а затем умножив их на κ_a , а также воспользовавшись формулами (3.3.9), (3.3.13) и (3.3.14), находим

$$\chi_3 = \frac{\kappa_a \cos^2(L_a, L_s; N^{-1})}{1 + (2q_{\max} + q_{\max}^2) \sin^2(L_a, L_s; N^{-1})}.$$

Анализ КУ χ_3 удобно выполнить путем его сравнения с КУ χ_2 [см. (3.3.19)]:

$$\chi_2 / \chi_3 = 1 + (2q_{\max} + q_{\max}^2) \sin^2(L_a, L_s; N^{-1}). \quad (3.3.26)$$

Эта зависимость для ряда фиксированных величин q_{\max} в функции величины $\sin^2(L_a, L_s; N^{-1})$ была рассчитана в работе [89] и приведена на рис. 3.12. Из формулы (3.3.26) и рисунка видно, что при отсутствии углового рассогласования, когда в соответствии с (3.3.14) $\sin^2(L_a, L_s; N^{-1}) = 0$, потери коэффициента усиления АР с фильтром $H_3(f)$ по отношению к фильтру $H_2(f)$ отсутствуют и $\chi_3 = \chi_2$. Если $q_{\max} < 1$, то эти потери малы также и при $\sin^2(L_a, L_s; N^{-1}) \neq 0$, они тем меньше, чем меньше q_{\max} . Если $q_{\max} > 1$, то имеют место потери КУ χ_3 по отношению к χ_2 . Так, если, например, $q_{\max} = 10$ и $\sin^2(L_a, L_s; N^{-1}) = 0,5$, то $\chi_2 / \chi_3 = 61$. Поэтому, если для фильтра с КЧХ $H_2(f)$ в соответствии с формулами (3.3.6);

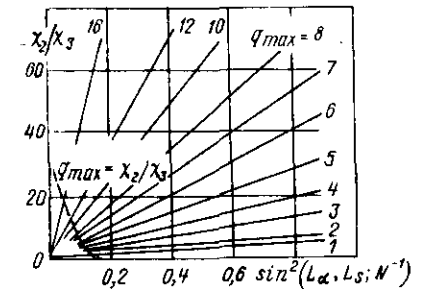


Рис. 3.12

(3.3.9), (3.3.10) и (3.3.19) отношение с/ш [см. (3.3.5)] $q_2 = q_{\max} \cos^2(L_a, L_s; N^{-1})$, то для рассматриваемых величин $q_{\max} = 10$ и $\cos^2(L_a, L_s; N^{-1}) = 0,5$ имеем $q_2 = 10 \cdot 0,5 = 5$. Следовательно, для фильтра с КЧХ $H_3(f)$ отношение $q_3 = q_2 / (\chi_2/\chi_3) = 5/61 = 0,082$. Таким образом, выходное отношение с/ш фильтра с КЧХ $H_3(f)$ на 18 дБ меньше, чем у фильтра с КЧХ $H_2(f)$. Если $q_{\max} = 2$, то $q_2 = 1$ и $\chi_2/\chi_3 = 5$, т. е. $q_3 = 0,2$. Таким образом, отличительной особенностью фильтра с КЧХ $H_3(f)$ является его чувствительность к угловому рассогласованию, причем, если этот сигнал сильный, то он подавляется и имеет место существенное уменьшение выходного отношения с/ш q_3 . На рис. 3.12 показана пунктиром кривая $\chi_2/\chi_3 = q_{\max}$, которая определяет условие $q_3 < 1$. Так, при $q_{\max} = 6$ $q_3 < 1$, если только $\sin^2(L_a, L_s; N^{-1}) < 0,1$. Таким образом, фильтр с КЧХ $H_3(f)$ подавляет лишь сильный сигнал ($q_{\max} > 1$), если сигнал слабый ($q_{\max} < 1$), то подавление практически отсутствует.

В случае если шум по элементам АР не коррелирован ($N=E$), то в соответствии с (3.3.9) и (3.3.13) $q_{\max} = Mg_s/g_n$ и $\cos^2(L_a, L_s; E) = 1 - R_{as}^2$, где ХН R_{as} определена в комментарии к формуле (3.3.17). Спектр процесса (3.3.7) на выходе сумматора фильтра с КЧХ $H_3(f)$ [см. (3.3.4)] равен

$$g_3 = g_s \frac{|L_a^T G_x^{-1} \bar{L}_s|^2}{(L_s^T G_x^{-1} \bar{L}_s)^2} + g_n \frac{L_s^T G_x^{-1} N G_x^{-1} \bar{L}_s}{(L_s^T G_x^{-1} \bar{L}_s)^2} \quad (3.3.27)$$

Это выражение совпадает с формулой (2.7.40), если принять шум некоррелированным по элементам АР, когда $N=E$. Числители первого и второго слагаемых (3.3.27) определены формулами (3.3.23) и (3.3.24), а их знаменатель найдем из выражения (3.3.22) путем умножения матрицы G_x^{-1} слева и справа на векторы L_s^T и \bar{L}_s , что дает

$$(L_s^T G_x^{-1} \bar{L}_s)^2 = [g_n \kappa_s + g_s (\kappa_a \kappa_s - |\kappa_{as}|^2)]^2 / [g_n^2 (1 + \kappa_a g_s / g_n)]^2.$$

Подставив эти три выражения в формулу (3.3.27) и используя обозначения (3.3.9), (3.3.13) и (3.3.14), получим

$$g_3 = g_s \frac{\kappa_a}{\kappa_s} \frac{\cos^2(L_a, L_s; N^{-1})}{[1 + q_{\max} \sin^2(L_a, L_s; N^{-1})]^2} + g_n \frac{1}{\kappa_s} \frac{1 + (2q_{\max} + q_{\max}^2) \sin^2(L_a, L_s; N^{-1})}{[1 + q_{\max} \sin^2(L_a, L_s; N^{-1})]^2} \quad (3.3.28)$$

В этом выражении первое слагаемое определяет спектр сигнала на выходе сумматора многомерного фильтра, а второе — спектр шума. Различие спектров g_2 [см. (3.3.20)] и g_3 [см. (3.3.28)] для фильтров с КЧХ $H_2(f)$ и $H_3(f)$ легко понять, сравнивая эти выражения. Влияние углового рассогласования на сигнальную составляющую спектра g_3 ясно видно из анализа первого слагаемого выражения (3.3.28): при малых величинах q_{\max} эта составляющая приближается к таковой в спектре q_2

[см. (3.3.20)]. При больших величинах q_{\max} возможно подавление сигнальной составляющей спектра q_3 .

Рассмотрим теперь шумовую составляющую спектра g_3 [см. (3.3.28)]. Отношение, содержащее тригонометрические функции, всегда больше единицы и равно ей, если $\sin^2(\dots)$ равен нулю или единице. Таким образом, в отличие от шумовой составляющей спектра g_2 [см. (3.3.20)], таковая для спектра g_3 [см. (3.3.28)] зависит от углового рассогласования. Эту зависимость легче понять, если принять, что $N=E$, когда $\kappa_s = M$. В таком случае при изменении $\sin^2(L_a, L_s; E)$ от нуля до единицы шумовая составляющая спектра g_3 увеличивается от g_n/M при $\sin^2(\dots) = 0$, достигая максимума, равного величине $(g_n/M) (2 + Mg_s/g_n)^2 (4 + 4Mg_s/g_n)^{-1}$ при $\sin^2(\dots) = (2 + Mg_s/g_n)^{-1}$, и далее уменьшается опять до величины g_n/M при $\sin^2(\dots) = 1$.

Рассогласованный по направлению сигнал фильтр с КЧХ $H_3(f)$ воспринимает как локальную помеху и находит компромисс между его подавлением и режекцией действительной помехи. Однако такой нежелательный эффект возникает лишь при сильном сигнале, когда $q_{\max} > 1$; если $q_{\max} < 1$, то такое явление практически отсутствует.

Выходное отношение сигнал/шум СПВО с различными типами многомерных фильтров при угловом рассогласовании. Индикаторное отношение с/ш СПВО определяется выражением (2.2.14), где КЧХ системы $\mathcal{H}(f)$ нужно положить равной $h_i(f)H_i(f)$, $h_i(f)$ взять для $i = 1, 2$ и 3 соответственно: $h_1(f) = \sqrt{g_s(f)}/g_n(f)$, $h_2(f) = h(f)$ [см. (2.1.10)] и $h_3(f) = v(f)$ [см. (3.2.5)]; матрицу $G_s(f)$ заменить на $G_s(f, a)$ и сохранить матрицу $G_n(f)$. В результате такой замены из формулы (2.2.14) получаем

$$Q_i = \frac{\sqrt{T} \int_0^{f_B} h_i^2(f) g_{s,i}(f) df}{\left(\int_0^{f_B} h_i^4(f) g_{n,i}^2(f) df \right)^{1/2}}, \quad (3.3.29)$$

где в соответствии с формулой (3.3.7) $g_{s,i}(f) = g_s(f) |\bar{H}_i^T(f) \bar{L}_a(f)|^2$ и $g_{n,i}(f) = g_n(f) \bar{H}_i^T(f) N(f) H_i(f)$ — спектры мощности сигнальной и шумовой составляющих процесса на выходе сумматора фильтра с КЧХ $H_i(f)$ при $i = 1, 2$ и 3. Все эти спектры были найдены выше. Они определяются соответственно первым и вторым слагаемыми выражений $g_1(f)$ [см. (3.3.18)], $g_2(f)$ [см. 3.3.20)] и $g_3(f)$ [см. (3.3.28)] (здесь и далее восстановлена зависимость величин от частоты f). Формулы для индикаторного отношения с/ш Q_i [см. (3.3.29)] будем в каждом случае преобразовывать к такому виду, чтобы величина Q_i определялась лишь характеристиками помехо-сигнальной ситуации (3.3.1) $g_s(f)$, $g_n(f)$, $L_a(f)$, $N(f)$, а также вектором $L_s(f)$, входящим в КЧХ $H_i(f)$ [см. (3.3.2) — (3.3.4)] и отличным от $L_a(f)$.

Используя выражения спектра мощности $g_1(f)$ [см. (3.3.18)] на выходе фильтра с КЧХ $H_1(f)$ [см. (3.3.2)] и КЧХ $h_1(f) = \sqrt{g_s(f)}/g_n(f)$, из выражения (3.3.29) получаем

$$Q_1 = \frac{\sqrt{T} \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} |L_a^T(f) \bar{L}_s(f)|^2 df}{\left(\int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} [L_s^T(f) N(f) \bar{L}_s(f)]^2 df \right)^{1/2}}, \quad (3.3.30)$$

где фактически $|L_a^T(f) \bar{L}_s(f)|^2 = M^2 R_{as}^2(f)$ – квадрат модуля ХН [см. (2.3.14) и (2.3.16)]. При отсутствии углового рассогласования, когда $L_a(f) = L_s(f)$, это выражение совпадает с формулой (2.2.41) для традиционной СПВО с УФХН.

Определим теперь индикаторное отношение с/ш Q_2 . Для получения результата, отвечающего оптимальной СПВО с КЧХ $H(f)$ [см. (2.1.9)], нужно в соответствии с формулой (3.3.3) КЧХ $H_2(f)$ денормировать, умножив $H_2(f)$ на величину $L_s^T(f) N^{-1}(f) \bar{L}_s(f) = \kappa_s(f)$ [для КЧХ $H_1(f)$ (3.3.2) это не потребовалось, так как там нормирующий множитель не является функцией частоты, а есть просто постоянная величина M]. Соответственно для получения требуемых величин спектров $g_{s,2}(f)$ и $g_{n,2}(f)$ выражение спектра $g_2(f)$ [см. (3.3.20)] нужно умножить на $\kappa_s^2(f)$. Используя, таким образом, откорректированное выражение (3.3.20) для спектров $g_{s,2}(f)$ и $g_{n,2}(f)$, а также формулу (2.1.10) для КЧХ $h_2(f)$, из выражения (3.3.29) находим

$$Q_2 = \frac{\sqrt{T} \int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \frac{|\kappa_{as}(f)|^2}{1 + g_s(f) \kappa_s(f) / g_n(f)} df}{\left(\int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \frac{\kappa_s^2(f)}{[1 + g_s(f) \kappa_s(f) / g_n(f)]^2} df \right)^{1/2}}. \quad (3.3.31)$$

Когда угловое рассогласование отсутствует, то $|\kappa_{as}(f)|^2 = \kappa_s^2(f)$; если к тому же сигнал слабый и $g_s(f) \kappa_s(f) / g_n(f) \ll 1$, то выражение (3.3.31) совпадает с формулой (2.1.70), или, что одно и то же, с формулой (2.1.69).

И наконец, найдем индикаторное отношение с/ш Q_3 для системы с многомерным фильтром, определяемым КЧХ $H_3(f)$ [см. (3.3.4)]. Здесь денормировка не нужна, а для полной эквивалентности КЧХ $\Phi(f)$ [см. (3.2.3)] и $H_3(f)$ [см. (3.3.3)] достаточно последнюю величину умножить на $b(f)$. Выражение КЧХ $\nu(f)$ послесумматорного фильтра [см. (3.2.5)] было получено выше в предположении, что сигнал приходит с ожидаемого направления, определяемого вектором $L_s(f)$. Для рассматриваемого здесь случая рассогласования ожидаемого и фактического направлений прихода сигнала изменим КЧХ $\nu(f)$ [см. (3.2.5)] следующим образом. Для эрмитовой формы, являющейся множителем перед

корнем, матрицу $G_n(f)$ заменим на матрицу $G_x(f)$ (3.3.1), а в эрмитовой форме, входящей под знак корня, сохраним матрицу $G_n(f)$. В таком случае основной член КЧХ $\nu(f)$, определяемый приближенной частью формулы (3.2.5), будет отвечать измеряемому спектру входного процесса (3.2.6), где матрица $G_n(f)$ заменена на $G_x(f)$. Второй же член КЧХ $\nu(f)$, определяемый квадратным корнем, близок по своей величине к $\sqrt{g_s(f)}$, так как знаменатель подкоренного выражения близок к единице (особенно при малых входных отношениях с/ш), а поэтому нецелесообразно было бы его усложнять заменой $G_n(f)$ на $G_x(f)$. Таким образом находим

$$\nu^2(f) = \frac{1}{g_\Phi^2(f)} \frac{|b(f)|^2 g_s(f)}{1 + g_s(f) \kappa_s(f) / g_n(f)}, \quad (3.3.32)$$

где $g_\Phi(f) = g_3(f)$ – спектр на выходе многомерного фильтра с КЧХ $H_3(f)$ [см. (3.3.4)], отвечающий входному процессу с матрицей ВСПМ $G_x(f)$ [см. (3.3.1)]. Определим спектр $g_3(f)$, воспользовавшись для этого выражением (3.3.27), которое здесь целесообразно упростить, объединив оба его слагаемых. Из этого выражения с учетом множителя $b(f)$ непосредственно следует, что

$$g_3 = \frac{|b|^2 L_s^T G_x^{-1}}{L_s^T G_x^{-1} \bar{L}_s} g_s \bar{L}_a L_a^T \frac{G_x^{-1} \bar{L}_s}{L_s^T G_x^{-1} \bar{L}_s} + \frac{|b|^2 L_s^T G_x^{-1}}{L_s^T G_x^{-1} \bar{L}_s} g_n N \frac{G_x^{-1} \bar{L}_s}{L_s^T G_x^{-1} \bar{L}_s} = \frac{|b|^2 L_s^T G_x^{-1}}{L_s^T G_x^{-1} \bar{L}_s} (g_s \bar{L}_a L_a^T + g_n N) \frac{G_x^{-1} \bar{L}_s}{L_s^T G_x^{-1} \bar{L}_s} = \frac{|b|^2}{L_s^T G_x^{-1} \bar{L}_s}, \quad (3.3.33)$$

где в соответствии с формулой (3.3.1) выражение в скобках есть матрица G_x . Воспользовавшись выражением для эрмитовой формы $L_s^T G_x^{-1} \bar{L}_s$, полученным при выводе формулы (3.3.28), для спектра g_3 находим

$$g_3 = \frac{|b|^2 g_n (1 + \kappa_a g_s / g_n)}{\left[\kappa_s \quad 1 + \kappa_a \frac{g_s}{g_n} \quad \left(1 - \frac{|\kappa_{as}|^2}{\kappa_a \kappa_s} \right) \right]}. \quad (3.3.34)$$

Подставив выражение (3.3.34) в формулу (3.3.32), определяем

$$\nu^2(f) = \frac{g_s(f) \kappa_s^2(f) \left\{ 1 + \kappa_a(f) \left(\frac{g_s(f)}{g_n(f)} \right) \left[1 - \frac{|\kappa_{as}(f)|^2}{\kappa_a(f) \kappa_s(f)} \right] \right\}}{|b(f)|^2 g_n^2(f) \left[1 + \kappa_a(f) \left(\frac{g_s(f)}{g_n(f)} \right) \right]^2 \left[1 + \kappa_s(f) \left(\frac{g_s(f)}{g_n(f)} \right) \right]}. \quad (3.3.35)$$

Теперь получены все выражения, необходимые для определения индикаторного отношения с/ш Q_3 [см. (3.3.29)]. Спектры $g_{s,3}(f)$ и $g_{n,3}(f)$, входящие в эту формулу, представляют собой соответственно первое и второе слагаемые выражения (3.3.28), которые с учетом множителя $b(f)$ нужно умножить на квадрат его модуля. Умножив далее спектры $g_{s,3}(f)$ и $g_{n,3}(f)$ на квадрат КЧХ $\nu^2(f)$, получаем подынтегральные функции числителя и знаменателя отношения (3.3.29) для сигнальной и шумовой составляющих. В результате находим

$$Q_3 = \frac{\int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \frac{|\kappa_{as}(f)|^2}{[1 + (g_s(f)/g_n(f))\kappa_a(f)]^2} df}{\int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \frac{|\kappa_{as}(f)|^2}{[1 + (g_s(f)/g_n(f))\kappa_a(f)]^2} df} \times \frac{1}{1 + (g_s(f)/g_n(f))\kappa_a(f)} \times \left[\int_0^{f_B} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \frac{\kappa_s^2(f) [1 - |\kappa_{as}(f)|^2 / \kappa_a(f)\kappa_s(f)]^2}{[1 + (g_s(f)/g_n(f))\kappa_a(f)]^4} df \right]^{1/2} \quad (3.3.36)$$

Если угловое рассогласование отсутствует, то $\kappa_{as}(f) = \kappa_a(f) = \kappa_s(f)$. В таком случае выражение (3.3.36) практически совпадает с формулой (2.2.24). Полное совпадение имело бы место, если бы при определении КЧХ (3.3.32) была использована приближенная часть выражения (3.2.5). Если к тому же сигнал слабый, так что $g_s(f)\kappa_s(f)/g_n(f) \ll 1$, то выражение (3.3.36) совпадает с формулой (2.1.69) для оптимальной СПВО.

В заключение укажем, что полученные выше выражения для индикаторных отношений с/ш можно использовать и при анализе ситуаций, когда кроме изотропного шума имеются также локальные помехи. Для этого достаточно заменить матрицу $N(f)$ на матрицу, определенную суммой матриц в квадратных скобках выражений (2.3.2) или (2.3.45).

Влияние на характеристики обнаружителя сигнала, присутствующего во входной реализации, используемой для обучения адаптивной системы. Как видно из алгоритма оптимальной СПВО [см. (2.1.39)], для его реализации необходимо располагать информацией о матрице ВСПМ шума $G_n(f) = g_n(f)N(f)$ на элементах АР. Из алгоритмов адаптивной оптимизации СПВО, рассмотренных в предыдущих параграфах, следует, что эта информация может быть получена путем обработки входной реализации. Однако это будет корреляционная матрица шума лишь в случае, когда

сигнал во входной реализации отсутствует. Таким образом, адаптивные алгоритмы хотя и способны восполнить недостающую информацию, но это будет информация о всем входном процессе, который может быть или только шумом, или смесью шума с сигналом. Поэтому, как следует из основных положений теории адаптивных систем [55], для обнаружения стохастического сигнала на фоне окрашенного шума необходимо осуществить предварительное „обучение“ системы – получить информацию о корреляционных свойствах шума, обработав для этого входную реализацию, содержащую лишь шум. Однако на практике получение такой реализации может быть затруднено, а тогда корреляционная матрица, используемая в адаптивном обнаружителе, будет являться суммой таких матриц для шума и сигнала. Поэтому целесообразно рассмотреть влияние на характеристики СПВО сигнала, присутствующего во входной реализации.

В соответствии с формулой (2.1.39) КЧХ оптимальной СПВО определяется выражением

$$h(f)H(f) = \sqrt{\frac{g_s(f)}{1 + g_s(f)\kappa_s(f)/g_n(f)}} G_n^{-1}(f) \bar{L}_s(f). \quad (3.3.37)$$

В адаптивном варианте реализации системы, осуществляемом на основе процедуры оптимальной фильтрации многомерного плосковолнового сигнала [см. (3.1.10)], эта же КЧХ (3.3.37) в соответствии с формулами (3.1.7) и (3.1.8) определяется так:

$$\nu(f)W(f) = \sqrt{\frac{1 + g_s(f)\kappa_s(f)/g_n(f)}{g_s(f)}} \frac{g_s(f)}{1 + g_s(f)\kappa_s(f)/g_n(f)} \times G_n^{-1}(f) \bar{L}_s(f) \quad (3.3.38)$$

Естественно [см. (3.1.8)], что оба эти варианта совпадают между собой и свидетельствуют о том, что для реализации оптимальной СПВО методами адаптации требуется определить матрицу ВСПМ шума $G_n(f)$. В адаптивном варианте реализации алгоритма СПВО измеряется матрица ВСПМ всего входного процесса, содержащего также и сигнал. Пусть, для общности, эта матрица определяется выражением (3.3.1), т. е. направления фактического и ожидаемого прихода сигнала не совпадают и характеризуются соответственно векторами $L_a(f)$ и $L_s(f)$. В таком случае КЧХ многомерного фильтра вместо вектора $G_n^{-1}(f) \bar{L}_s(f)$ будет определяться вектором $G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f)$ и спектр процесса на выходе фильтра с такой векторной КЧХ будет

$$g_H(f) = L_s^T(f) G_x^{-1}(f) G_x(f) G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f) = L_s^T(f) G_x^{-1}(f) \bar{L}_s(f).$$

Воспользовавшись формулами (3.3.22) – (3.3.24), находим, что сигнальная и шумовая составляющие этого спектра соответственно равны

$$g_{s,H}(f) = \frac{g_s(f)}{g_n^2(f)} \frac{|\kappa_{as}(f)|^2}{[1 + g_s(f)\kappa_a(f)/g_n(f)]^2}; \quad (3.3.39)$$

$$1 + (g_s(f)/g_n(f))\kappa_a(f) \times \rightarrow$$

$$\rightarrow \times [2 + (g_s(f)/g_n(f))\kappa_a(f)] \times \rightarrow$$

$$g_{n,H}(f) = \frac{\kappa_s(f)}{g_n(f)} \frac{\rightarrow \times [1 - |\kappa_{as}(f)|^2/\kappa_a(f)\kappa_s(f)]}{[1 + g_s(f)\kappa_a(f)/g_n(f)]^2}. \quad (3.3.40)$$

Далее для определения индикаторного отношения с/ш СПВО с многомерным фильтром, имеющим КЧХ, равную $G_x^{-1}(f)\bar{L}_s(f)$, можно воспользоваться формулой (3.3.29). Входящие сюда спектры $g_{s,H}(f)$ и $g_{n,H}(f)$ определяются соответственно формулами (3.3.39) и (3.3.40), а выражение для КЧХ скалярного послесумматорного фильтра $h(f)$ приведено в соотношении (3.3.37). Выполнив требуемые формулой (3.3.29) вычисления, убеждаемся, что полученное в результате выражение в точности совпадает с формулой (3.3.36). Такой результат можно было ожидать по двум причинам. Во-первых, было принято, что КЧХ многомерных фильтров $H(f)$ [см. (2.1.9)] и $W(f)$ [см. (3.1.7)] в результате „обучения” на входной реализации, содержащей сигнал, будут определяться не матрицей шума $G_n(f)$, а матрицей всего входного процесса $G_x(f) = G_n(f) + G_s(f, a)$, т. е. так же, как и КЧХ $\Phi(f)$ [см. (3.2.3)] фильтра с ограничением. Во-вторых, КЧХ скалярного послесумматорного фильтра $v(f)$ выбрана таким образом, что при использовании многомерных фильтров как с КЧХ $W(f)$, так и с $\Phi(f)$ — результирующие КЧХ системы $v(f)W(f)$ и $v(f)\Phi(f)$ в обоих случаях совпадают с КЧХ оптимальной системы $h(f)H(f)$ [см., например, соотношения (3.3.37) и (3.3.38)].

Таким образом, выражение (3.3.36) во всех рассмотренных случаях определяет индикаторное отношение с/ш СПВО, учитывающее следующие два фактора условий реального функционирования системы: несовершенство ожидаемого и фактического направлений прихода сигнала, а также присутствие во входной реализации, используемой для обучения, самого сигнала.

В заключение этого пункта отметим, что для оценки помехоустойчивости СПВО можно пользоваться одной величиной (индикаторным отношением с/ш) лишь для слабых сигналов, в противном случае нужно находить вероятность правильного обнаружения при заданной ложной тревоге, что для гауссова распределения выходного эффекта требует определения его первых двух моментов для ситуаций H_0 и H_1 (см. разд. 2.1). Поэтому применять выражение (3.3.36) для оценки помехоустойчивости СПВО при сильных сигналах нужно осторожно. Вместе с тем при сильных сигналах менее остро стоит задача обеспечения самой помехоустойчивости системы, а следовательно, и точности ее оценки.

Синтез оптимальной СПВО с учетом искажений плосковолновых фронтов. На эффективность работы СПВО в реальных условиях влияют искажения плоских фронтов волн в районе АР, обусловленные рядом факторов. К ним, в первую очередь, относятся случайные неоднородности водной среды, явления дифракции волн на конструкции АР, разброс чувствительности преобразователей и характеристик предварительных

усилителей и т. п. Математическое описание этих физических явлений — сложная самостоятельная проблема, выходящая за рамки настоящей книги. Поэтому для иллюстрации способа влияния искажений волновых фронтов на СПВО ограничимся их про-

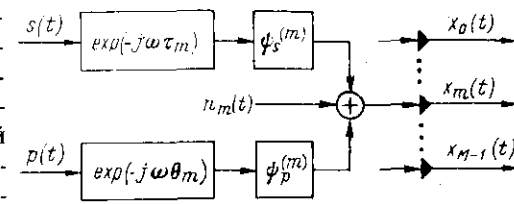


Рис. 3.13

стейшей моделью. В первом приближении эти искажения можно описать с помощью флуктуаций амплитуд и фаз [87] процессов на выходе элементов АР, полагая, что характеристики этих флуктуаций одни и те же для всех частот в данной полосе. Применительно к помехо-сигнальной ситуации плосковолновые сигнал и локальная помеха, изотропный шум — способ учета этих искажений для процессов на выходе m -го элемента АР, иллюстрируемые функциональной схемой (рис. 3.13). Здесь показаны экспоненциальные звенья, учитывающие обычные запаздывания сигнала $s(t)$ и помехи $p(t)$, обусловленные их задержками в среде на m -м элементе АР относительно элемента с нулевым номером, а также последовательно включенные звенья с КЧХ $\psi_s^{(m)}$ и $\psi_p^{(m)}$, описывающие эффект искажения плоских фронтов волн сигнала и помехи

$$\psi_s^{(m)} = \frac{1}{k_s} a_s^{(m)} \exp(j\varphi_s^{(m)}); \quad \psi_p^{(m)} = \frac{1}{k_p} a_p^{(m)} \exp(j\varphi_p^{(m)}), \quad (3.3.41)$$

где $a_s^{(m)}$, $\varphi_s^{(m)}$ и $a_p^{(m)}$, $\varphi_p^{(m)}$ — случайные величины, описывающие амплитудные и фазовые искажения фронтов волн сигнала и локальной помехи на выходе m -го элемента АР, а величины k_s и k_p представляют собой нормирующие множители, обеспечивающие равенство единице коэффициентов передачи для сигнала и помехи, т. е. равенство $M\{|\psi_s^{(m)}|^2\} = M\{|\psi_p^{(m)}|^2\} = 1$, а поэтому $k_s^2 = M\{(a_s^{(m)})^2\}$ и $k_p^2 = M\{(a_p^{(m)})^2\}$. Положим, что величины амплитудных и фазовых искажений имеют гауссовское распределение и между собой не коррелированы. Примем также, что характеристики амплитудных искажений сигнала и помехи $a_s^{(m)}$ и $a_p^{(m)}$ совпадают между собой и для всех значений $m = 0, 1, \dots, M-1$ равны следующим величинам: математическое ожидание — единица, дисперсия — σ_a^2 . Начальный момент второго порядка есть, таким образом, $1 + \sigma_a^2$; нормированный корреляционный момент между амплитудными искажениями на m_1 и m_2 элементах АР примем равным $r_a(m)$, где $m = m_1 - m_2$. Аналогично для вероятностных характеристик фазовых искажений возьмем: математическое ожидание — нуль, дисперсия — σ_φ^2 и нормированный корреляционный момент — $r_\varphi(m)$. Используя характеристическую функцию двумерного гауссова распределения находим, что

$$M\{\exp(j\varphi_s^{(m)})\} = M\{\exp(j\varphi_p^{(m)})\} = \exp(-\sigma_\varphi^2/2); \quad (3.3.42)$$

$$M\{\exp[j(\varphi_s^{(m_1)} - \varphi_s^{(m_2)})]\} = M\{\exp[j(\varphi_p^{(m_1)} - \varphi_p^{(m_2)})]\} =$$

$$= \exp\{-\sigma_\varphi^2[1 - r_\varphi(m_1 - m_2)]\}.$$

С учетом изложенного выше КЧХ [см. (3.3.41)]

$$\begin{aligned}\psi_s^{(m)} &= a_s^{(m)} \exp(j\varphi_s^{(m)}) / \sqrt{1 + \sigma_a^2}, \\ \psi_p^{(m)} &= a_p^{(m)} \exp(j\varphi_p^{(m)}) / \sqrt{1 + \sigma_a^2},\end{aligned}\quad (3.3.43)$$

а их вероятностные характеристики таковы:

$$M \{ \psi_s^{(m)} \} = M \{ \psi_p^{(m)} \} = \exp(-\sigma_\varphi^2/2) / \sqrt{1 + \sigma_a^2}; \quad (3.3.44)$$

$$\begin{aligned}M \{ \psi_s^{(m_1)} \bar{\psi}_s^{(m_2)} \} &= M \{ \psi_p^{(m_1)} \bar{\psi}_p^{(m_2)} \} = \\ &= [(1 + \sigma_a^2 r_a(m_1 - m_2)) / (1 + \sigma_a^2)] \exp\{-\sigma_\varphi^2 [1 - r_\varphi(m_1 - m_2)]\}.\end{aligned}\quad (3.3.45)$$

Примем для простоты изложения, что амплитудные и фазовые искажения на соседних элементах АР не коррелированы между собой, т. е. корреляционные моменты $r_a(m_1 - m_2) = r_\varphi(m_1 - m_2) = 1$, при $m_1 = m_2$ и равны нулю при $m_1 \neq m_2$. В таком случае выражение (3.3.45) принимает вид

$$M \{ \psi_s^{(m_1)} \psi_s^{(m_2)} \} = M \{ \psi_p^{(m_1)} \bar{\psi}_p^{(m_2)} \} = \begin{cases} 1 & \text{при } m_2 = m_1; \\ \beta & \text{при } m_2 \neq m_1, \end{cases} \quad (3.3.46)$$

где $\beta = [\exp(-\sigma_\varphi^2)] / (1 + \sigma_a^2)$. Таким образом, в простейшем случае амплитудные и фазовые искажения характеризуются величинами их дисперсий $-\sigma_a^2$ и σ_φ^2 .

В результате искажения волнового фронта сигнала изменяется его матрица ВСПМ. Суть этого изменения такова: без учета искажений Фурье-изображение реализации сигнала на выходе m -го элемента АР есть величина $X_m(f) = \exp(-j \cdot 2\pi f \tau_m) S(f)$, если же искажения учитывать, то это изображение $X_m(f) = \hat{X}_m(f) \psi_s^{(m)}$. Поэтому для матрицы ВСПМ сигнала с учетом искажения волнового фронта вместо обычного выражения (2.1.3) получаем

$$\hat{G}_s(f) = g_s(f) \bar{\Psi}_s(f) \bar{L}_s(f) L_s^T(f) \Psi_s^T(f),$$

где $\Psi_s(f)$ — диагональная матрица, элементы которой определяются формулой (3.3.43). Элементы матрицы $\Psi_s(f)$ случайны, а поэтому, выполнив осреднение результирующей матрицы $G_s(f)$, с учетом выражений (3.3.45) и (3.3.46) находим

$$\tilde{G}_s(f) = M \{ \hat{G}_s(f) \} = g_s(f) [\beta \bar{L}_s(f) L_s^T(f) + (1 - \beta) E]. \quad (3.3.47)$$

Из этого выражения видно, что в результате искажения плосковолнового фронта сигнала уменьшается его когерентная составляющая (ее вес становится равным $\beta < 1$) и появляется рассеянная (диффузная) составляющая типа изотропного шума, имеющая вес $1 - \beta$. Аналогичное выражение получается и для локальной помехи:

$$\tilde{G}_p(f) = M \{ \hat{G}_p(f) \} = g_p(f) [\beta \bar{L}_p(f) L_p^T(f) + (1 - \beta) E]. \quad (3.3.48)$$

Для синтеза алгоритма оптимальной СПВО с учетом искажений фронтов волн сигнала и локальной помехи нужно воспользоваться обобщенным отношением правдоподобия [9]. С этой целью заменим в выражении (2.1.8) матрицы G_s и G_p на \hat{G}_s и \hat{G}_p , причем обозначим для краткости $\hat{G}_{pn} = G_n + \hat{G}_p$ (полагаем, что поле шума не коррелировано на элементах АР, т. е. $G_n = g_n E$, и искажений не претерпевает) и далее выполним осреднение по величинам $\psi_s^{(m)}$ и $\psi_p^{(m)}$. В результате находим обобщенное ОП

$$\hat{\Lambda}(X) \approx \int_{-f_B}^{f_B} X^T(f) M \{ \hat{G}_{np}^{-1}(f) \hat{G}_s(f) \hat{G}_{np}^{-1}(f) \} \psi_s, \psi_p \bar{X}(f) df. \quad (3.3.49)$$

Полагая искажения малыми, примем

$$M \{ \hat{G}_{np}^{-1} \hat{G}_s \hat{G}_{np}^{-1} \} \psi_s, \psi_p \approx M \{ \hat{G}_{np}^{-1} \} \psi_p M \{ \hat{G}_s \} \psi_s M \{ \hat{G}_{np}^{-1} \} \psi_p. \quad (3.3.50)$$

Для упрощения записи здесь и далее аргумент f опущен. Воспользовавшись выражением (3.3.48) находим

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{np}^{-1} &= M \{ \hat{G}_{np}^{-1} \} \psi_p = \\ &= \frac{1 + (M - 1 + \beta) g_p / g_n}{g_n + M g_p} E - \beta \frac{g_p / g_n}{g_n + M g_p} \bar{L}_p L_p^T.\end{aligned}\quad (3.3.51)$$

Если помеха сильная, т. е. $g_n / g_p \ll 1$, то

$$\tilde{G}_{np}^{-1} \approx \left(1 - \frac{1 - \beta}{M} \right) \frac{1}{g_n} E - \frac{\beta}{M} \frac{1}{g_n} \bar{L}_p L_p^T. \quad (3.3.52)$$

Подставим формулы (3.3.47) и (3.3.52) в равенство (3.3.50) и запишем выражение эрмитовой формы, являющейся подынтегральной функцией в алгоритме обработки (3.3.49), в виде следующих двух слагаемых A_1 и A_2 :

$$A_1 = \beta g_s | X^T \tilde{G}_{np}^{-1} \bar{L}_s |^2 = \beta \frac{g_s}{g_n^2} | X^T H_\beta |^2, \quad (3.3.53)$$

где

$$H_\beta = \left(1 - \frac{1 - \beta}{M} \right) \bar{L}_s - \beta D_{ps} \bar{L}_p, \quad (3.3.54)$$

а величина D_{ps} определяется формулой (2.3.14);

$$A_2 = (1 - \beta) g_s X^T \tilde{G}_{np}^{-1} \tilde{G}_{np}^{-1} \bar{X} \approx (1 - \beta) \frac{g_s}{g_n^2} [X^T \bar{X} - \frac{\beta}{M} | X^T \bar{L}_p |^2], \quad (3.3.55)$$

где знак приближения означает, что перед членами в квадратных скобках опущены громоздкие постоянные коэффициенты, близкие к единице.

Составляющая A_1 алгоритма оптимальной СПВО, синтезированного с учетом искажений волновых фронтов, отвечает обработке когерентной составляющей сигнала, определяемой первым членом его матрицы ВСПМ [см. (3.3.47)]. Как видно из сравнения выражений КЧХ многомерного фильтра H_β [см. (3.3.54)] и H [см. (2.3.5)] (для случая $N=E$ и $g_n \ll g_p$), обработка когерентной составляющей сигнала (3.3.53) та же, что и в оптимальной системе, отличие лишь в величинах постоянных коэффициентов, входящих в КЧХ H_β и H . Однако наличие рассеянной компоненты сигнала обусловило появление в этом случае дополнительной составляющей A_2 алгоритма оптимальной СПВО.

Влияние искажений плосковолновых фронтов на помехоустойчивость адаптивной СПВО. Выше мы ограничились рассмотрением простейшего алгоритма оптимальной СПВО, синтезированного с учетом искажений фронтов волн сигнала и помехи. Более полное и подробное рассмотрение методики синтеза такого алгоритма имело бы смысл в случае возможности получения вероятностных характеристик искажений, соответствующих реальным условиям. Поэтому далее рассмотрим особенности функционирования в условиях искажений волновых фронтов адаптивных систем, которые должны в какой-то мере учитывать эти искажения.

Действительно, как следует из материала предыдущих двух параграфов, адаптивные СПВО не нуждаются в априорном задании корреляционных матриц шума и помех, они фактически измеряются в процессе работы системы. Поэтому при наличии искажений плосковолновых фронтов эти корреляционные матрицы могут измеряться в принципе с учетом этих искажений. Для этого необходимо лишь, чтобы искажения волновых фронтов во времени флуктуировали достаточно медленно по отношению к длительности процесса адаптации, т. е. интервал корреляции этих флуктуаций должен быть в несколько раз больше, чем время сходимости адаптивного алгоритма. В таком случае адаптивная система будет отслеживать медленные искажения плосковолновых фронтов.

Оценим помехоустойчивость такой адаптивной системы при искажениях волновых фронтов. В соответствии со сказанным примем, что алгоритм адаптивной СПВО определяется выражением, аналогичным (2.1.39), но с учетом искажения плоского фронта локальной помехи, т. е.

$$\hat{H}(f) = [G_n(f) + \hat{G}_p(f)]^{-1} \bar{L}_s(f) = \hat{G}_{np}^{-1}(f) \bar{L}_s(f). \quad (3.3.56)$$

Очевидно, что к матрицам $G_n(f)$ и $\hat{G}_p(f)$ в принципе нужно было добавить еще матрицу $\hat{G}_s(f)$ сигнала, учитывающую также искажение его фронта. Однако, считая, что сигнал относительно слабый, эту матрицу можно опустить, вектор же $\bar{L}_s(f)$, определяющий направление прихода сигнала, входит в выражение для $H(f)$, так же как и для оптимальной СПВО.

Действуя способом, изложенным в разд. 2.1, определим вначале приращение математического ожидания выходного эффекта, обусловленное сигналом, с учетом искажения плоских волн. Используя КЧХ многомерного фильтра $\hat{H}(f)$ [см. (3.3.56)] и КЧХ скалярного фильтра $h(f) = \sqrt{g_s(f)}$ [см. (2.1.39)], получаем

$$\Delta \hat{m} = 2T \int_0^{f_B} g_s(f) L_s^T(f) \hat{G}_{np}^{-1}(f) \hat{G}_s(f) \hat{G}_{np}^{-1}(f) \bar{L}_s(f) df.$$

Выполнив осреднение величины $\Delta \hat{m}$ и воспользовавшись формулами (3.3.47) и (3.3.51), находим

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{m} = M\{\Delta \hat{m}\}_{\psi_s, \psi_p} &= 2\beta T \int_0^{f_B} g_s^2(f) [L_s^T(f) \tilde{G}_{np}^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 df + \\ &+ 2(1-\beta) T \int_0^{f_B} g_s^2(f) L_s^T(f) [\tilde{G}_{np}^{-1}(f)]^2 \bar{L}_s(f) df, \end{aligned} \quad (3.3.57)$$

где в предположении, что величины искажений волновых фронтов относительно малы, принято: $M\{[L_s^T \hat{G}_{np}^{-1} \bar{L}_s]^2\} \approx [L_s^T M\{\hat{G}_{np}^{-1}\} \bar{L}_s]^2$, а также $M\{[\hat{G}_{np}^{-1}]^2\} \approx [M\{\hat{G}_{np}^{-1}\}]^2$.

Аналогично выражению (2.1.62) находим, что с учетом искажений фронтов волн дисперсия флуктуаций выходного эффекта СПВО, обусловленная шумом и помехой, определяется выражением

$$\hat{\sigma}_z^2 = 4T \int_0^{f_B} g_s^2(f) [L_s^T(f) \hat{G}_{np}^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 df,$$

осреднение которого дает

$$\tilde{\sigma}_z^2 = M\{\hat{\sigma}_z^2\} = 4T \int_0^{f_B} g_s^2(f) [L_s^T(f) \tilde{G}_{np}^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 df. \quad (3.3.58)$$

Формулы (3.3.57) и (3.3.58) позволяют определить помехоустойчивость СПВО с адаптивной оптимизацией обработки при случайных искажениях плоских фронтов волн

$$\tilde{Q} = \frac{\Delta \tilde{m}}{\tilde{\sigma}_z} = \tilde{Q}_1 + \tilde{Q}_2, \quad (3.3.59)$$

где

$$\tilde{Q}_1 = \beta (T \int_0^{f_B} g_s^2(f) [L_s^T(f) \tilde{G}_{np}^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 df)^{1/2}; \quad (3.3.60)$$

$$\tilde{Q}_2 = (1-\beta) \frac{\sqrt{T} \int_0^{f_B} g_s^2(f) L_s^T(f) [\tilde{G}_{np}^{-1}(f)]^2 \bar{L}_s(f) df}{\left(\int_0^{f_B} g_s^2(f) [L_s^T(f) \tilde{G}_{np}^{-1}(f) \bar{L}_s(f)]^2 df \right)^{1/2}}. \quad (3.3.61)$$

Для получения выражений \tilde{Q}_1 и \tilde{Q}_2 в явном виде достаточно в последние формулы подставить выражение (3.3.51) для матрицы $\tilde{G}_{np}^{-1}(f)$. Так, например, формула (3.3.60) для составляющей выходного отношения с/ш \tilde{Q}_1 принимает в таком случае вид

$$Q_1 = \beta M \left\{ T \int_0^{f_b} \frac{g_s^2(f)}{g_n^2(f)} \left[\frac{1 + (M-1-\beta)g_p(f)/g_n(f)}{1 + Mg_p(f)/g_n(f)} - \beta \frac{Mg_p(f)/g_n(f)}{1 + Mg_p(f)/g_n(f)} R_{ps}^2(f) \right]^2 df \right\}^{1/2}, \quad (3.3.62)$$

где $R_{ps}^2(f)$ определяется формулой (2.3.14). Из приведенных выражений видна зависимость помехоустойчивости от степени искажений фронтов волн, которая количественно определяется величиной параметров β . Чем больше дисперсии их амплитудных и фазовых флуктуаций σ_a^2 и σ_φ^2 , тем меньше параметр β и, тем самым, больше потери помехоустойчивости. Если же искажения отсутствуют, то параметр $\beta=1$, и из последних выражений видно, что отношение с/ш Q_1 совпадает с отношением с/ш оптимальной СПВО [см. (2.3.15)], а $Q_2=0$.

В заключение отметим, что принятая в выражении (3.3.46) модель учета амплитудных и фазовых искажений плоских фронтов волн отвечает принятой в литературе методике учета влияния случайных ошибок на ХН антенны. Действительно, матрица ВСПМ $\tilde{G}_s(f)$ сигнала с учетом искажения его плоского фронта определяется формулой (3.3.47). Сигнал приходит с направления α_s , определяемого вектором $L_s(f)$ [см. (2.1.3)]. Найдем мощность сигнала на выходе АР, компенсированной в направлении α , определяемом вектором $L_a(f)$ (выражается так же, как и L_s , лишь с заменой угла α_s на α). Действуя так же, как и в разд. 2.3, находим

$$\tilde{P}_s(\alpha, f) = L_a^T(f) \tilde{G}_s(f) \bar{L}_a(f) = g_s(f) M^2 \left[\beta R_{as}^2(f) - (1-\beta) \frac{1}{M} \right],$$

где $R_{as}(f)$ — ХН линейной АР (без учета ошибок), определяемая формулой (2.3.16), где угол α_p нужно заменить на α . Подставив в это выражение формулу (3.3.46) для величины β , находим

$$\tilde{P}_s(\alpha, f) = \frac{g_s(f) M^2}{1 + \sigma_a^2} \left[e^{-\sigma_\varphi^2} R_{as}^2(f) + (1 - e^{-\sigma_\varphi^2} + \sigma_a^2) \frac{1}{M} \right] \quad (3.3.63)$$

Выражение в квадратных скобках этой формулы отвечает способу учета влияния случайных амплитудных и фазовых ошибок на ХН линейной АР с ненаправленными элементами и единичным амплитудным распределением, изложенному в работе [100]. Полагая, что дисперсия фазовых ошибок σ_φ^2 мала, можем принять $\exp(-\sigma_\varphi^2) \approx 1$ и $1 - \exp(-\sigma_\varphi^2) \approx \sigma_\varphi^2$, а поэтому

$$\tilde{P}_s(\alpha, f) = \frac{g_s(f) M^2}{1 + \sigma_a^2} \left[R_{as}^2(f) + (\sigma_\varphi^2 + \sigma_a^2) \frac{1}{M} \right], \quad (3.3.64)$$

что согласуется с результатом применения для той же АР методики, изложенной в монографии [58].

Адаптивные системы с обратными корреляционными связями. Такие системы применяются в случае узкополосных входных процессов, а также широкополосных процессов, предварительно подвергнутых узкополосной фильтрации (в частности, например, с помощью процедуры БПФ). Исходные положения, лежащие в основе таких систем [64, 77], были изложены в разд. 2.4. Здесь же кратко рассмотрим принципы их адаптивной оптимизации.

Схема системы с корреляционными обратными связями, показанная на рис. 3.14, следует из схемы СПВО рис. 2.15. Здесь U_s и U_p соответственно Фурье-изображения выходных процессов компенсаторов сигнала и помехи на фиксированной частоте f . Блок адаптации БА вырабатывает коэффициент усиления K , на которой далее умножается изображение U_p , после чего величина KU_p вычитается из U_s , т. е. выход системы есть $U = U_s - KU_p$ (обозначениям H_1 и H_2 на рис. 2.15 соответствуют: $H_1 = 1$; $H_2 = -K$). Как следует из условия, определяющего величину K [см. вывод формулы (2.4.39)], оно означает, что корреляционный момент $M\{\bar{U}_p U\} = M\{\bar{U}_p (U_s - KU_p)\} = 0$, откуда $K = M\{\bar{U}_p U_s\} / M\{|U_p|^2\}$. Оценка \hat{K} коэффициента усиления K , вырабатываемая БА, строится [77] с помощью итерационной процедуры, базирующейся на асимптотическом выполнении условия $M\{\bar{U}_p(i) U(i)\} = 0$, при $i \rightarrow \infty$, где i — номер шага итерационной процедуры. В таком случае

$$\hat{K}(i+1) = \hat{K}(i) + \mu \hat{U}_p(i) U(i) = \hat{K}(i) + \mu \bar{U}_p(i) [U_s(i) - \hat{K}(i) U_p(i)], \quad (3.4.1)$$

где μ величина шага изменения коэффициента K . Полагая, что величины $U_s(i)$ и $U_p(i)$ не коррелированы на соседних итерациях $i = \pm 1, \pm 2, \dots$, из последнего выражения нетрудно установить, что величина шага μ должна удовлетворять условию $0 < \mu < 2/M\{|U_p|^2\}$, смысл которого аналогичен (3.1.43). При выполнении этого условия $\lim_{i \rightarrow \infty} M\{\hat{K}(i)\} = K$, т. е.

итерационная процедура (3.4.1) сходится. Алгоритм (3.4.1) иллюстрируется схемой, представленной на рис. 3.15, где Δ — задержка во времени на такт, переводящая $\hat{K}(i+1)$ в $\hat{K}(i)$. Рассматриваемая автоматическая система является замкнутой, с отрицательной обратной связью; задающие входное воздействие есть величина $\bar{U}_p U$, которая при $\hat{K} \rightarrow K$ сама стремится к нулю. Таким образом, происходит непрерывная отработка требуемой

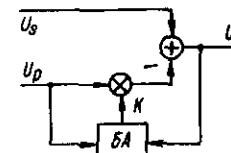


Рис. 3.14

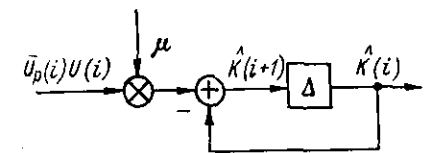


Рис. 3.15

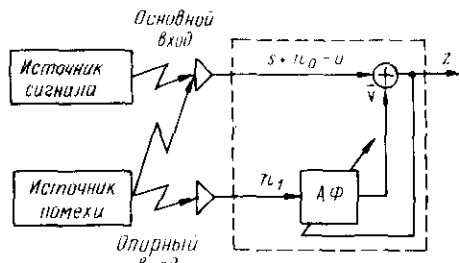


Рис. 3.16

изображенной на рис. 3.14, однако для понимания принципа работы системы адаптивной компенсации помехи целесообразно рассмотреть ее функциональную схему [4], изображенную на рис. 3.16. Здесь сигнал s вместе с помехой n_0 поступает на основной вход системы, образуя смесь $u = s + n_0$. На опорный вход поступает помеха n_1 , коррелированная с n_0 , однако их коэффициент корреляции априори неизвестен. Пройдя через адаптивный фильтр АФ помеха преобразуется в сигнал v , далее вырабатывается напряжение $z = s + n_0 - v$, которое используется также для перестройки параметров АФ. Цель компенсации — обеспечить наилучшее, в смысле минимума среднеквадратической ошибки (СКО), представление s с помощью z . Полагая, что величины s , n_0 , n_1 и v имеют нулевые средние значения, причем коррелированы между собой лишь величины n_0 и n_1 , находим $M\{z^2\} = M\{s^2\} + M\{(n_0 - v)^2\}$. Так как в результате настройки АФ сигнал не изменяется, то $\min M\{z^2\} = M\{s^2\} + \min M\{(n_0 - v)^2\}$. Таким образом, выходной сигнал v АФ является наилучшей (в смысле минимума СКО) оценкой помехи. Кроме того, так как в случае минимизации величины $M\{(n_0 - v)^2\}$ величина $M\{(z - s)^2\}$ также минимальна, можно утверждать, что настройка АФ по минимуму полной выходной мощности обеспечивает получение наилучшей оценки z сигнала s (в смысле минимума СКО для данной системы), что эквивалентно максимизации выходного отношения s/z .

Рассмотрим теперь адаптивную систему режекции локальной помехи с дополнительным („предадаптивным“ [81]) компенсатором [25, 82, 93], позволяющую на основе алгоритма (3.1.48) минимизации СКО оценки сигнала реализовать алгоритм обработки с линейным ограничением (3.2.31). Схема такой системы изображена на рис. 3.17. АР с M элементами ($m = 0, 1, \dots, M - 1$) компенсирована обычным образом в направлении прихода ожидаемого сигнала (задержки τ_m), так что составляющие вектора $\mathcal{X}(n)$ дискретизированные с шагом Δ напряжения $x_0(n), x_1(n), \dots, x_{M-1}(n)$, т. е. фазированы по сигналу. Сумма этих напряжений образует выходное напряжение $y_s(n) = \sum_{m=0}^{M-1} x_m(n)$, которое подается на блок линий задержек БЛЗ с отводами и весовыми коэффициентами β_n^* [см. (3.2.11)], обеспечивающими желаемую КЧХ системы $b(f)$ [см. (3.2.12)], поэтому $u(n) = \sum_{k=0}^N \beta_k^* y_s(n-k)$. Кроме того, напряжения $x_m(n)$ обрабатываются дополнительным компенсатором ДК так, что

величины коэффициента усиления K , необходимая для режектирования помехи, содержащейся в выходном процессе сигнального компенсатора.

Адаптивная система с дополнительным компенсатором, исключая сигнал, эквивалентна системе с линейным ограничением. Хотя по своей сути такая система и близка к системе,

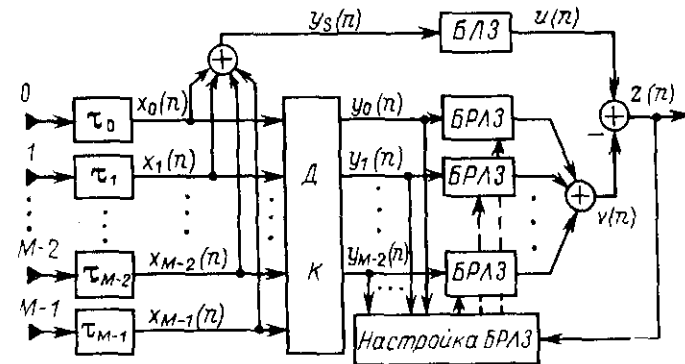


Рис. 3.17

M -мерный вектор $\mathcal{X}(n)$ преобразуется в $(M - 1)$ -мерный вектор $\mathcal{Y}'(n)$ с помощью $(M - 1) \times M$ -матрицы A . Следовательно, $\mathcal{Y}'(n) = A\mathcal{X}(n)$, причем матрица A такова, что каждая ее строка A_m удовлетворяет условию $\sum_{i=0}^{M-1} a_{mi} = A_m^T \mathbf{1} = 0$ для $m = 0, 1, \dots, M - 2$, а векторы A_m , образующие строки матрицы A , линейно независимы. Например, 3×4 -матрицы, удовлетворяющие этим условиям, таковы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

Далее составляющие $(M - 1)$ -мерного вектора $\mathcal{Y}'(n)$, т. е. последовательности $y_m(n)$, где $m = 0, 1, \dots, M - 2$, обрабатываются каждая с помощью своего блока линий задержек с регулируемым весовым коэффициентом w_{mn} БРЛЗ, так что на выходе их сумматора образуется величина

$$v(n) = \sum_{m=0}^{M-2} \sum_{k=1}^N w_{mn} y_m(n-k). \quad (3.4.3)$$

И наконец, окончательным выходом такой системы является величина $z(n) = u(n) - v(n)$. Из изложенного ясно, что при наличии на входе АР плоскотоволнового сигнала, он наряду с шумом и помехами, входит в величину $u(n)$ на выходе обычного компенсатора; однако на выходе дополнительного компенсатора — в величине $v(n)$ — в силу свойства матрицы A , отмеченного выше, сигнал отсутствует — там будут содержаться лишь шумы и помехи. Следовательно, для получения наилучшей (в смысле минимума СКО) оценки s сигнала s , осуществляемой путем перестройки весовых коэффициентов БРЛЗ, необходимо воспользоваться алгоритмом типа (3.1.48), который в этом случае имеет вид

$$\mathcal{W}'(k+1) = \mathcal{W}'(k) + 2\mu[u(k) - \mathcal{W}'^T(k)\mathcal{Y}'(k)]\mathcal{Y}'(k), \quad (3.4.4)$$

где $\mathcal{W}'(k)$ — $(M - 1)N$ -мерный вектор весовых коэффициентов w_{mn} . Таким образом, величина $z(k) = u(k) - \mathcal{W}'^T(k)\mathcal{Y}'(k)$ играет роль ошибки

$\epsilon(k)$, входящей в алгоритм (3.1.48), с помощью которой методом градиентного спуска ведется настройка весовых коэффициентов.

Убедимся теперь в том, что рассмотренная система в точности соответствует системе с линейным ограничением, описанной в разд. 3.2. Это удобно сделать в частотной области [82] для случая оптимальной КЧХ [см. (3.2.3)] многомерного фильтра с линейным ограничением. Так как АР рассматриваемой системы [см. (рис. 3.17)] уже скомпенсирована, то эталонная оптимальная КЧХ $\Phi(f)$, используемая далее для сравнения, определяется в соответствии с формулой (3.2.3) выражением

$$\Phi(f) = [b(f)/I^T G_x^{-1}(f)I] G_x^{-1}(f)I, \quad (3.4.5)$$

где $G_x(f)$ — матрица ВСПМ суммарного процесса на входе АР; $b(f)$ — заданная КЧХ системы для направления $\alpha_s = 0$, которому соответствует $L_s(f) = I$; I — вектор, состоящий из M единиц. Определим теперь КЧХ многомерного фильтра системы в точном соответствии с ее функциональной схемой, изображенной на рис. 3.17. Дополним компоненты $(M-1)$ -мерного вектора $\mathcal{Y}'(n)$ еще одной компонентой $y_s(n)$ и обозначим такой расширенный M -мерный вектор через $\mathcal{Y}(n)$. Ясно, что связь между векторами $\mathcal{X}(n)$ и $\mathcal{Y}(n)$ такова: $\mathcal{Y}(n) = B\mathcal{X}(n)$, где $M \times M$ -матрица B образована из $(M-1) \times M$ -матрицы A путем ее дополнения строкой, образованной M единицами, т. е. вектор-строкой I^T . Таким образом, матрица B , а также ее примеры, отвечающие матрицам A [см. (3.4.2)], имеют вид:

$$B = \begin{bmatrix} I^T \\ A \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.4.6)$$

В работе [82] рассмотрен второй (частный) вид матриц A и B . Таким образом, соответствующие векторам $\mathcal{Y}(n)$ и $\mathcal{X}(n)$ в частотной области векторы $Y(f)$ и $X(f)$ связаны между собой соотношением $Y(f) = BX(f)$. Дополним $(M-1) \times N$ -мерный вектор $\mathcal{W}'(k)$ [см. (3.4.4)] N компонентами — величинами β_n , отвечающими весовым коэффициентам БЛЗ (см. на рис. 3.17) блок преобразования величины $y_s(n)$ в $u(n)$, и обозначим такой расширенный MN -мерный вектор через $\mathcal{W}(k)$. Аналогично КЧХ многомерного фильтра эталонной системы (3.4.5) будем далее вместо БРЛЗ рассматривать M -мерную непрерывную оптимальную импульсную характеристику многомерного фильтра, которой отвечает M -мерная КЧХ $W(f)$. Таким образом, в соответствии с выражениями (3.2.1) и (3.2.2) рассматриваемая система оптимальна, если будет минимальна величина эрмитовой формы $W^T(f)G_y(f)W(f)$ при выполнении ограничивающего

условия $D^T W(f) = b(f)$. Из изложенного выше следует, что $G_y(f) = BG_x(f)B^T$; а M -мерный вектор D имеет одну компоненту, равную единице, а остальные — нулю [выходной величине $v(n)$ на рис. 3.17 отвечает коэффициент передачи по сигналу, равный нулю, а величине $u(n)$ — заданная КЧХ $b(f)$], т. е. $D^T = [1, 0, \dots, 0]$. В таком случае оптимальная КЧХ $W(f)$ определяется, аналогично (3.2.3), выражением

$$W(f) = [b(f)/D^T G_y^{-1}(f)D] G_y^{-1}(f)D. \quad (3.4.7)$$

Сравниваемые системы будут эквивалентны, если их выходные величины пропорциональны, а именно:

$$W^T(f)Y(f) = W^T(f)BX(f) = k\Phi^T(f)X(f), \quad (3.4.8)$$

т. е.

$$W^T(f)B = k\Phi^T(f) \quad \text{или} \quad W(f) = k(B^T)^{-1}\Phi(f), \quad (3.4.9)$$

где k — постоянная величина, а векторные КЧХ $\Phi(f)$ и $W(f)$ определяются соответственно формулами (3.4.5) и (3.4.7). Используя в формуле (3.4.7) равенство $G_y^{-1}(f) = [BG_x(f)B^T]^{-1}$, а также выражение (3.4.5) для $\Phi(f)$, убеждаемся, что условие (3.4.9) выполняется, если $B^{-1}D = kI$ или $D = kB$. Так как $BI = MD$ (здесь M — скаляр), то постоянная $k = 1/M$. Таким образом, действительно, система с дополнительным компенсатором, схема которой изображена на рис. 3.17 эквивалентна системе с линейным ограничением, схема которой изображена на рис. 3.6. Некоторые другие варианты схем адаптивных антенных систем „ с пред-адаптивным” компенсатором рассмотрены в работе [81].

Адаптивные системы, основанные на прямом обращении выборочной корреляционной матрицы. Такие системы рассмотрены в ряде работ [83, 97] применительно к задаче радиолокационного обнаружения в следующей постановке: АР имеет M элементов, а многомерный фильтр (на ЛЗ с отводами) — N весовых коэффициентов; известен MN -мерный вектор S комплексных отгибаний полезного сигнала, корреляционная $MN \times MN$ -матрица помехи R априори неизвестна. Обучение системы для определения оценки корреляционной матрицы R предшествует рабочему режиму системы. Оптимальное решение задачи, отвечающее полной априорной информированности, заключается в определении MN -мерного вектора W_0 , оптимального по критерию максимума отношения s/δ

$$q = \bar{W}^T S S^T W / \bar{W}^T R W; \quad W_0 = R^{-1}S \quad (3.4.10)$$

[ср. с (2.2.1), а также с (2.1.46) и (2.1.73)]. В варианте адаптивной оптимизации используется оценка максимального правдоподобия выборочной корреляционной матрицы:

$$\hat{R} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L X_i \bar{X}_i^T; \quad M\{X_i \bar{X}_k^T\} = \begin{cases} R & \text{при } k=i; \\ 0 & \text{при } k \neq i, \end{cases} \quad (3.4.11)$$

где X_l — MN -мерный вектор комплексной огибающей выборки помехи в l -й момент времени. В работе [97] получены характеристики адаптивной реализации оптимального вектора W_0 на основе использования оценки \hat{R} , т. е. $\hat{W}_0 = \hat{R}^{-1}S$, причем для существования обратной матрицы \hat{R}^{-1} необходимо, чтобы $L \geq MN$. В таком случае выходное отношение с/ш q нормированное к своему оптимальному (максимальному) значению $\bar{S}^T R^{-1} S$, определяется выражением

$$q/q_{\max} = \rho = (\bar{S}^T \hat{R}^{-1} S)^2 / [(\bar{S}^T R^{-1} S)(\bar{S}^T \hat{R}^{-1} R \hat{R}^{-1} S)]. \quad (3.4.12)$$

В работе [97] найдены закон распределения величины ρ и ее моменты. Так, $M\{\rho\} = (L - MN + 2)/(L + 1)$; при $L \rightarrow \infty$ величина $M\{\rho\} \rightarrow 1$. Если $L \geq 2MN - 3 \approx 2MN$, то средние энергетические потери $M\{\rho\}$ не превосходят 3 дБ (число выборок не менее чем в два раза превосходит размерность входного вектора). Приведены сравнительные результаты оценки характеристик сходимости вычисления весовых коэффициентов при использовании следующих двух методов: прямого обращения и градиентного спуска. Параметры исследованной системы таковы: $M=4, N=2, d=\lambda/2$, действует 30 источников локальных помех, расположенных равномерно по углу в пределах 180° . Максимальное отношение с/ш в таком случае $q_{\max} = 62,2$ дБ. Уже для 15 обучающих выборок метод прямого обращения обеспечивает отношение с/ш q , равное 59,7 дБ. Для градиентного метода и того же числа выборок отношение с/ш составляет лишь 15,8 дБ, а после 2000 выборок оно достигает только 38 дБ. В работе [83] вывод о существовании более быстрой сходимости адаптивной процедуры, обеспечиваемой методом прямого обращения, подтверждается дополнительными расчетами, дающими количественные результаты сходимости того же порядка, что и приведенные выше. Общий вывод, который делается в этих работах, таков: уже при объеме обучающей выборки $L = 2MN$ (равном двойному числу степеней свободы MN) потери отношения с/ш q (по отношению к его максимальному значению q_{\max}) при использовании метода прямого обращения составляют порядка 3 дБ.

Выигрыш в скорости сходимости метода прямого обращения по сравнению с градиентным методом получается (даже в рамках рассматриваемой простейшей постановки задачи обнаружения) за счет существенного увеличения вычислительных затрат, необходимых для реализации первого метода. Так, градиентный метод, реализуемый по L выборкам, требует MNL комплексных операций умножения; метод прямого обращения для того же числа выборок требует порядка $(MN)^3/2 + (MN)^2(L/2 + 2) + MNL$ таких умножений [43].

Для расширения области применения метода прямого обращения (для его использования необходимо выполнение условия $L \geq MN$ — иначе матрица обратная \hat{R} (3.4.11) не существует) в работе [1] предложено применять метод регуляризации акад. А. Н. Тихонова. В соответствии с этим оценка выборочной матрицы

$$\hat{R}_{\text{рег}} = [\mu^2 E + 1/L \sum_{l=1}^L X_l \bar{X}_l^T], \quad (3.4.13)$$

где μ^2 — параметр регуляризации ($\mu^2 \ll \sigma_p^2$, а также $\sigma_p^2 \gg \sigma_n^2$, где σ_p^2 , σ_n^2 — дисперсия помехи, шума); E — единичная $MN \times MN$ -матрица. Необходимо, чтобы $L \geq K$ (где K — число локальных помех), т. е. число выборок L удовлетворяло условию $K \leq L \leq MN$. После обращения матрицы $\hat{R}_{\text{рег}}$ находится оценка весового вектора $W_{\text{рег}} = \hat{R}_{\text{рег}}^{-1} S$.

В работе [2] выполнен сопоставительный анализ эффективности алгоритмов адаптивной максимизации отношения с/ш для метода прямого обращения при использовании двух способов оценки корреляционной матрицы [см. (3.4.11) и (3.4.13)]. Моделирование осуществлялось для системы с АР, где $M=10, d/\lambda=0,5, \sigma_p^2/\sigma_n^2=70$ дБ, $K=4$, причем локальные помехи действуют в направлениях, отвечающих максимумам соседних четырех боковых лепестков (после главного) для ХН данной АР. Результаты моделирования показали, что в случае использования максимально правдоподобной оценки [см. (3.4.11)] корреляционной матрицы уже при 12 обучающих выборках достигается достаточно высокое подавление собственно локальных помех — величина отношения сигнал/помеха отвечает оценкам, сделанным в работе [97]. Однако величина отношения с/ш устанавливается плохо, так как выборочная корреляционная матрица помехи плохо обусловлена и весовые коэффициенты еще далеки от своих оптимальных значений. ХН фактически пока еще „развалена”, хотя подавление когерентных локальных помех при 12 обучающих выборках уже и осуществляется (т. е. отсутствует ограничение на весовые коэффициенты для ожидаемого направления прихода сигнала). В случае использования регуляризованной оценки матрицы корреляций [см. (3.4.13)] наряду с хорошим подавлением помех практически сразу же устанавливается высокое (с потерями, имеющими место в рассматриваемом случае порядка 0,5 дБ) отношение с/ш.

Алгоритмы адаптивной оптимизации, реализуемые в частотной и частотно-волновой областях. Предпосылки возможности создания СПВО в частотной и частотно-волновой областях были изложены в разд. 2.1 и 2.6, где были проведены алгоритмы оптимальных СПВО для представления исходной информации на элементах АР в этих областях. Здесь же рассмотрим кратко лишь особенности алгоритмов адаптивной оптимизации, используемых в этих областях. Так как временным реализациям отвечают в частотной области их Фурье-изображения, являющиеся комплексными функциями частоты, то вначале рассмотрим комплексную форму [67] алгоритма наискорейшего спуска [см. (3.1.48)]. В таком случае весовые коэффициенты (3.1.19), а также изображение временной реализации (3.1.20) образуют $M(N/2 + 1)$ -мерные комплексные векторы, где M — число элементов АР; $(N/2 + 1)$ — число дискретных значений частоты f_l с $l=0, 1, \dots, N/2$ [см. вывод формулы распределения (1.4.7)]. Изображение ошибки фильтрации сигнала, подобно (3.1.30), определяется разностью $S(f_l) - W^T X(f_l) = E(f_l)$, где Фурье-изображениям отвечают соответствующие временные функции в указанной формуле, причем будем считать, что W и $X(f_l)$ — M -компонентные векторы, образованные M составляющими Фурье-изображений входных процессов $x_m(t)$ ($m=0, 1, \dots, M-1$) на данной частоте f_l , а изображения $S(f_l)$ и $E(f_l)$ — скалярные величины. Так как минимизируемой величиной [см. (3.1.31)] является

дисперсия ошибки $M\{|E(f_l)|^2\}$, то мгновенные значения величины градиента вдоль его действительной и мнимой составляющих соответственно равны

$$\nabla_{\text{Re } W}(|E_l|^2) = E_l(-\bar{X}_l) + \bar{E}_l(-X_l);$$

$$\nabla_{\text{Im } W}(|E_l|^2) = E_l(j\bar{X}_l) + \bar{E}_l(-jX_l),$$

где индекс l указывает на зависимость соответствующей величины от частоты f_l . Применяв метод градиентного спуска к действительной и мнимой частям вектора весовых коэффициентов, находим

$$\text{Re } W_l(k+1) = \text{Re } W_l(k) - \mu \nabla_{\text{Re } W}(|E_l|^2);$$

$$\text{Im } W_l(k+1) = \text{Im } W_l(k) - \mu \nabla_{\text{Im } W}(|E_l|^2).$$

Поскольку $W_l(k) = \text{Re } W_l(k) + j \text{Im } W_l(k)$, то определяем

$$W_l(k+1) = W_l(k) - \mu [\nabla_{\text{Re } W}(|E_l|^2) + j \nabla_{\text{Im } W}(|E_l|^2)].$$

Используя приведенные выше выражения, окончательно находим

$$W_l(k+1) = W_l(k) + 2\mu E_l(k) \bar{X}_l(k), \quad (3.4.14)$$

что аналогично формуле (3.1.48), лишь здесь величины W_l , E_l и X_l — комплексные.

Рассмотрим пример возможного использования алгоритма градиентного спуска в частотной области. Выше было показано, что в системе с дополнительным („преадаптивным“) компенсатором (см. рис. 3.17) находит применение алгоритм наискорейшего спуска [82], определяемый выражением (3.4.4). В этой работе также дан пример реализации такого алгоритма в частотной области. В таком случае алгоритму (3.4.4) на основании (3.4.14) в частотной области отвечает

$$W_l'(k+1) = W_l'(k) + 2\mu [U_l(k) - W_l'^T(k) Y_l(k)] \bar{Y}_l(k), \quad (3.4.15)$$

где $W_l'(k)$, $U_l(k)$ и $Y_l(k)$ — Фурье-изображения на частоте f_l , соответствующие величинам $W'(k)$, $u(k)$ и $Y(n)$ на k -м шаге адаптации.

Для алгоритма минимизации выходной мощности с ограничением (3.2.30), реализуемого во временной области, может быть также построен аналогичный ему алгоритм, но реализуемый в частотной области. Для этого за основу может быть взята постановка задачи (3.2.1), (3.2.2), но для каждой фиксированной частоты f_l ($l = 0, 1, \dots, N/2$). В таком случае необходимо найти алгоритм градиентного спуска, минимизирующий мощность выхода системы для частоты f_l при линейном ограничении, т. е. минимизирующий эрмитову форму $\bar{W}_l^T G_l W_l$ при условии $L_l^T W_l = b_l$. Здесь индекс l указывает на зависимость от частоты f_l , а величинам в (3.2.1) и (3.2.2) отвечают $L_l = L_x(f_l)$, $b_l = b(f_l)$ и $G_l = G_x(f_l)$, причем вектор

$\Phi(f_l)$ заменен на $W_l = W(f_l)$. Далее для оптимизации комплексного M -мерного вектора W_l методом градиентного спуска можно найти, подобно (3.2.28), следующую итеративную формулу:

$$W_l(k+1) = P_l [W_l(k) - \mu G_l W_l(k)] + A_l, \quad (3.4.16)$$

где величины A_l и P_l определяются по формулам (3.2.27), причем $MN \times N$ -матрицу C нужно заменить на M -компонентный вектор \bar{L}_l , а N -компонентный вектор B на скаляр b_l [это обусловлено тем, что итеративная процедура (3.4.16) реализуется для каждой частотной составляющей автономно]. В таком случае $A_l = \bar{L}_l b_l / M$ и $P_l = E - \bar{L}_l L_l^T / M$. Заменяя далее $M \times M$ -матрицу ВСИМ входного процесса G_l на ее оценку $\bar{X}_l(k) X_l^T(k)$ ($X_l(k)$ — M -мерный вектор Фурье-изображения M -мерного процесса на выходах АР, взятый для частоты f_l), приходим к адаптивному алгоритму определения вектора $W_l(k)$, аналогичному (3.2.30),

$$\hat{W}_l(k+1) = P_l [\hat{W}_l(k) - \mu U_l(k) \bar{X}_l(k)] + A_l, \quad (3.4.17)$$

где $U_l(k) = X_l^T(k) \hat{W}(k)$, а величины P_l и A_l определены выше. Возможна реализация адаптивных алгоритмов в частотной области путем прямого обращения выборочной матрицы \hat{G}_l входного процесса, образованной на частоте f_l путем осреднения некоторого числа ее оценок $\bar{X}_l(k) X_l^T(k)$. Для зависимости (2.7.41) получим выходной эффект $(L_l^T \hat{G}_l^{-1} \bar{L}_l)^{-1}$ системы с алгоритмом (3.2.3).

Для обработки информации в частотной области используется алгоритм БПФ [23]. Структурная схема СПВО, реализующей алгоритм минимизации среднеквадратической ошибки оценки сигнала [см. (3.4.14)] в частотной области, показана на рис. 3.18. Временные процессы $x_m(t)$ с выходов M элементов АР поступают на блоки N -точечных БПФ, в результате чего вычисляются M массивов их Фурье-изображений для $N/2 + 1$ частот f_l , т. е. $M(N/2 + 1)$ -мерных векторов X_l^m , где $m = 0, 1, \dots, M - 1$ и $l = 0, 1, \dots, N/2$. Далее составляющие векторов X_l^m , взятые для фиксированной частоты f_l , компонуются в $N/2 + 1$ векторов X_l с M составляющими каждый. Адаптивная фильтрация в частотной области осуществляется путем

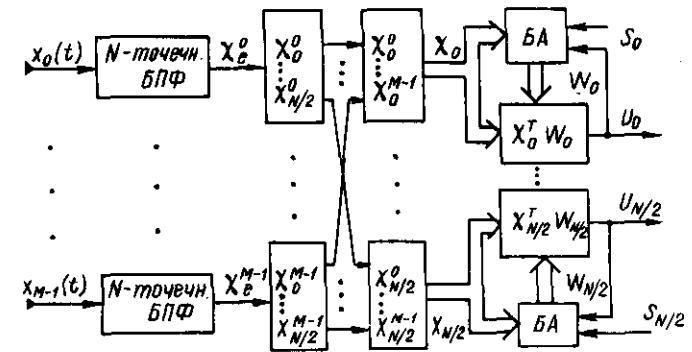


Рис. 3.18

вычисления скалярных произведений $X_i^T W_i = U_i$, причем вектор весовых коэффициентов W_i для каждой частоты f_i определяется в своем блоке адаптации БА, реализуемом в соответствии с алгоритмом (3.4.4). Здесь ошибка оценки сигнала $E_i = S_i - U_i$, где S_i — изображение на частоте f_i сигнала $s(t)$. Схема СПВО, реализующей алгоритм адаптации с ограничением (3.4.17), полностью аналогична изображенной на рис. 3.18, лишь вместо величины S_i в блоке БА нужно использовать величины P_i и A_i , определенные выше.

В заключение рассмотрим кратко принципы реализации адаптивной СПВО в частотно-волновой области. Как следует из выражения (2.6.8), в результате преобразования M -мерного вектора X_i^m временных Фурье-изображений на частоте f_i [в (2.6.8) это величины $X_m(f)$ для $f = f_i$ и $m = 0, 1, \dots, M - 1$] получаем также M -мерный вектор $\mathcal{X}(l, r)$ пространственных Фурье-изображений для данной временной частоты f_i и M пространственных частот $\varphi_r = r/Md$, где $r = 0, 1, \dots, M - 1$. Таким образом, адаптивные процедуры вычисления весовых коэффициентов в частотно-волновой области следуют из выражений (3.4.14) и (3.4.17) в результате замены M -компонентного вектора X_i на M -компонентный же вектор $\mathcal{X}(l, r)$. В случае линейной АР для выполнения Фурье-преобразования по пространству можно также использовать алгоритм БПФ, т. е. для перехода к дискретным значениям двумерных частотно-волновых изображений (для значений их временной и пространственных частот) может быть применен алгоритм двумерного БПФ [см. (1.5.20)]. Причем, так как это преобразование осуществляется последовательно в два этапа — вначале по времени, а затем по пространству [см. формулу (1.5.21)], — схему на рис. 3.18 нужно дополнить еще блоками M -точечных БПФ, выполняющих обработку M -компонентных векторов X_i для каждой фиксированной временной частоты f_i .

Антенная система с управляемыми положениями нулей характеристики направленности. В случае узкополосного входного процесса возможно создание такой ХН, что допустимо управление угловым положением ее нулей, в результате которого они будут расположены на направлениях прихода локальных помех, создаваемых точечными источниками излучения, а поэтому помехи будут режектироваться [100]. Рассмотрим вначале систему, режектирующую одну локальную помеху. Структурная схема такой

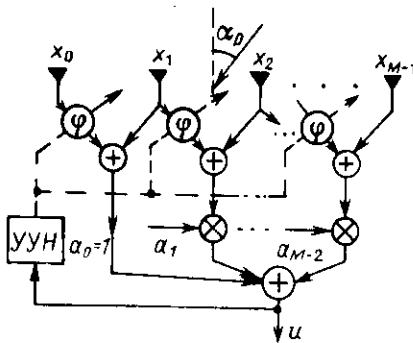


Рис. 3.19

системы изображена на рис. 3.19, где показана M элементная линейная АР с межэлементным расстоянием d . Система предназначена для приема сигнала, приходящегося по нормали к АР, и режекции локальной помехи, приходящей под углом α_p , и содержит $M - 1$ блоков фазовращателей, необходимых для режекции локальной помехи. Определим величину фазы φ , которая должна быть установлена, чтобы осуществить формирование ХН в направлении по нормали к АР с одновременной режекцией

локальной помехи, приходящей с направления α_p (заметим, что аналогично рассматривается случай для произвольного направления прихода сигнала, для которого, конечно, АР должна быть скомпенсирована). В соответствии с выражением (1.5.10), определяющим плоскую волну, приходящую с произвольного направления α , будем характеризовать соответствующий ей процесс нормированной величиной $\exp(-j \cdot 2\pi f \delta m)$, где единичная задержка $\delta = (d/c) \sin \alpha$. Из схемы 3.19 следует, что напряжение с выхода m -го элемента АР следует умножить на $\exp(j \varphi)$ и просуммировать с выходным напряжением $(m + 1)$ -го элемента, так что на выходе m -го сумматора образуется величина

$$u_m = \exp[-j \cdot (2\pi f \delta m - \varphi)] + \exp[-j \cdot 2\pi f \delta (m + 1)] = \exp(-j \cdot 2\pi f \delta m) [\exp j \varphi + \exp(-j \cdot 2\pi f \delta)], \quad (3.4.18)$$

где $m = 0, 1, \dots, M - 2$, т. е. число величин u_m равно $M - 1$. Величины u_m можно рассматривать как выходы элементов АР с $M - 1$ элементами. Величины u_m (см. рис. 3.19) умножаются на амплитудные коэффициенты a_m и далее суммируются, так что

$$u = \sum_{m=0}^{M-2} a_m u_m = [\exp j \varphi + \exp(-j \cdot 2\pi f \delta)] \sum_{m=0}^{M-2} a_m \exp(-j \cdot 2\pi f \delta m) = D_1(\alpha) D_2(\alpha) = D(\alpha), \quad (3.4.19)$$

где $D_1(\alpha)$ — ХН двухэлементного интерферометра, имеющего между выходными напряжениями элементов сдвиг фаз, равный φ , а $D_2(\alpha)$ — ХН АР с $M - 1$ элементами и весовым распределением a_m . Выходная величина [см. (3.4.19)] определяет результирующую ХН $D(\alpha)$ исходной АР с M элементами, являющуюся произведением ХН $D_1(\alpha)$ и $D_2(\alpha)$. Чтобы получить нуль в направлении на локальную помеху (когда $\alpha = \alpha_p$), необходимо чтобы удовлетворялось условие $|D(\alpha_p)| = 0$, для чего достаточно выполнение равенства $|D_1(\alpha_p)| = 0$. Так как

$$|D_1(\alpha_p)| = |\exp j \varphi + \exp(-j \cdot 2\pi f \delta)| = 2 |\cos[(\varphi + 2\pi f (d/c) \sin \alpha_p)]|,$$

находим, что $|D_1(\alpha_p)| = 0$ при $\varphi = \pi - 2\pi f (d/c) \sin \alpha_p$. В результате такого сдвига фаз φ , обеспечиваемого на выходе первых $M - 1$ элементов АР с помощью фазовращателей, управляемых устройством установки нулей УУН (см. рис. 3.19), будет осуществляться режекция локальной помехи, приходящей с направления α_p . Одновременно с этим, как следует из выражения (3.4.19), будет также сформирована ХН в заданном направлении (в данном случае по нормали к АР), причем ее формой можно управлять с помощью распределения a_m . Из выражения (3.4.19) видно, что наличие ХН двухэлементного интерферометра изменяет результирующую ХН антенны, ухудшая ее и делая тем более отличной от нормальной ХН,

ЦИФРОВЫЕ АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ОБРАБОТКИ

4.1. Задача и функции цифровой пространственно-временной обработки в адаптивных системах

Особенности описания дискретных и цифровых процессов и систем. Все более расширяется область применения цифровой обработки сигналов. Ее используют и для гидролокационных систем, о чем свидетельствуют подробные обзоры литературы [8, 47], в которых рассматриваются особенности как пространственной, так и временной обработки гидроакустических сигналов, а также методы адаптивной обработки сигналов в АР. Многочисленные работы, отмеченные в предыдущей главе, обзоры [3, 43, 52] свидетельствуют о возможности широкого использования цифровых методов в СПВО.

При цифровой обработке выполняются два вида преобразований исходной аналоговой информации — дискретизация ее во времени и квантование по уровню. Следует обратить внимание на то, что первый переход — от аналоговых величин к их дискретным значениям — отвечает традиционной методике, используемой при синтезе оптимальных радиотехнических систем, в том числе и СПВО. Действительно, исходным представлением пространственно-временных реализаций входного поля на элементах АР, использованным выше, являлась совокупность его пространственно-временных, пространственно-частотных или частотно-волновых дискретных выборочных значений. На основе вероятностного распределения таких дискретных величин и осуществлялся выше синтез оптимальных алгоритмов обнаружения и оценки параметров многомерных сигналов (дальнейшее возвращение к непрерывным величинам было продиктовано лишь удобством конкретного исследования). То же самое относится и к процедурам адаптивной оптимизации алгоритмов СПВО, основанным на измерении ПВКФ входного поля с помощью ее дискретных значений, в которой дискретность по пространству обусловлена дискретной природой АР, а дискретность по времени — ЛЗ с отводами, реализуемыми по выходам элементов АР. В связи с этими особенностями методов исследования СПВО выше неоднократно осуществлялся переход к дискретным представлениям временных процессов (разд. 1.1), систем (разд. 1.2), полей (разд. 1.3), частотных и волновых Фурье-изображений (разд. 1.4), многомерных фильтров, реализуемых на ЛЗ с отводами (разд. 2.5), рекуррентных (пошаговых) алгоритмов вычисления весовых коэффициентов многомерных фильтров методом градиентного спуска (разд. 3.1 и 3.2).

При изложении основных положений теории СПВО дискретные представления вводились по мере необходимости, т. е. несколько фрагментарно.

чем меньше угол между направлением прихода сигнала и локальной помехи. Таким образом можно наращивать число нулей ХН с управляемыми угловым положением, создавая „дерево нулей” [100]. Понятно, что число локальных помех, которое можно режектировать с помощью такой схемы, не может превосходить $M - 1$, где M число элементов АР. Такой способ режекции локальных помех справедлив только по отношению к очень узкополосным процессам, когда в точках теоретических нулей ХН существуют достаточно глубокие и узкие зоны подавления. Иногда эти положения бесосновательно переносят на широкополосные процессы, для которых ХН вообще не имеет нулей. Кроме того, следует подчеркнуть, что корректное рассмотрение задачи пространственной фильтрации с позиций алгоритма оптимальной СПВО (см. разд. 2.3) вообще не выдвигает никаких принципиальных ограничений на число локальных помех, которое может быть любым. При этом происходит лишь уменьшение потенциально достижимой помехоустойчивости оптимальной СПВО по отношению к ее помехоустойчивости при обнаружении сигнала в поле изотропного шума, когда локальные помехи отсутствуют.

Некоторые возможные направления развития теории адаптивных СПВО. Основная задача, возникающая при разработке адаптивной СПВО, заключается в построении алгоритма адаптивной оптимизации многомерного фильтра системы. Эта задача относится к проблеме оптимизации в условиях неопределенности и математически сводится к отысканию экстремума некоторой функции в условиях действия помехи, вероятностные характеристики которой известны не полностью. Для решения подобных задач широко используются различные рекуррентные алгоритмы стохастической аппроксимации [74]. Основным вопросом теории стохастической аппроксимации является отыскание алгоритмов, обладающих ускоренной сходимостью, а также установление предельных возможностей скорости сходимости. Алгоритмы стохастической аппроксимации обладают высокой помехоустойчивостью и позволяют достичь оптимальных величин скорости сходимости. В книге [74] обсуждается применение метода стохастической аппроксимации к адаптивной оптимизации антенной системы, предложенной в статье [66].

Другим современным теоретическим направлением, которое может найти применение для исследования оптимальных СПВО, является метод переменных состояния в комбинации с использованием калмановской фильтрации. Принципы такого подхода для решения задач обнаружения предложены в книге [9] и могут быть распространены на многомерные системы, к числу которых относятся и СПВО. И, наконец, следует отметить статью [60], где для синтеза оптимальной СПВО применяется оценочно-корреляционно-компенсационный метод, основанный на специальном представлении отношения правдоподобия, ранее развитом в книге [59].

Вместе с тем при переходе от непрерывных сигналов к дискретным у специалистов по системам обработки информации возникает естественное желание понять, как изменяются при этом свойства системы. Поэтому целесообразно рассмотреть особенности математического описания дискретных сигналов и систем, подчеркнув его отличие от описания непрерывных сигналов и систем. Это нетрудно сделать, базируясь на привычных представлениях теории радиотехнических сигналов и систем.

Используемая в инженерной практике теория цифровых систем фактически основана на линейной теории дискретных (импульсных) систем, описывающей процессы, дискретизированные лишь по времени (операция дискретизации по времени линейна). Операция квантования по уровню нелинейна, а поэтому соответствующие эффекты, связанные с погрешностями аналого-цифрового преобразования входной информации, а также ошибками арифметических действий, обусловленными конечной разрядностью цифровых устройств, по своему математическому описанию достаточно сложны. Для учета влияния этих факторов на эффективность цифровой обработки в настоящее время разработаны специальные достаточно простые инженерные методы.

Типовые блоки цифровой адаптивной СПВО, их функции и задачи. Выше в связи с исследованием алгоритмов СПВО были рассмотрены (на различных уровнях общности) несколько вариантов функциональных схем СПВО, определяющих ее типовые блоки и решаемые ими задачи. Общая функциональная схема СПВО с предварительной компенсацией АР в направлении прихода ожидаемого сигнала показана на рис. 2.3; далее на рис. 2.20 изображена схема СПВО, базирующаяся на использовании нерекурсивного многомерного фильтра, и, наконец, на рис. 3.3 и 3.6 представлены два варианта адаптивной реализации многомерного фильтра.

На рис. 4.1 изображена обобщенная структурная схема СПВО, где дано условное разделение ее на укрупненные типовые блоки. Здесь показаны: АР – антенная решетка, УФХН – устройство формирования ХН, АМФ – адаптивный многомерный фильтр, СФ – скалярный фильтр, КД – квадратичный детектор, ФНЧ – фильтр нижних частот, И – индикатор; двойными стрелками показаны линии передачи многомерной информации, а одинарными – скалярной. Собственно к системе обработки относятся блоки, расположенные после АР.

Первым таким блоком является УФХН, предназначенное для компенсации АР в направлении ожидаемого сигнала. Это устройство может быть реализовано во временной области – путем использования временных задержек (разд. 2.1 и 2.2), в частотной области – путем управления фазами временных частотных составляющих (разд. 2.1), в частотно-волновой области – путем управления фазами временных и пространственных частотных составляющих (разд. 2.6). При реализации УФХН цифровыми методами информация, поступающая с выходов элементов АР,

должна преобразовываться в цифровую форму с помощью АЦП.

Вторым блоком, выполняющим прост-

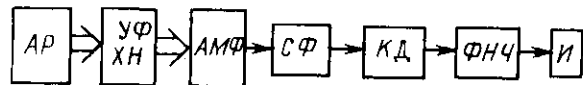


Рис. 4.1

ранственную обработку, является АМФ, осуществляющий пространственную фильтрацию сигнала в поле шума и помех. В качестве структурной основы АМФ, реализуемого во временной области, используется (разд. 2.5) совокупность нерекурсивных фильтров (в непрерывном варианте ЛЗ) с регулируемыми весовыми коэффициентами, перестраиваемыми с помощью итеративных адаптивных процедур градиентного спуска (разд. 3.1 и 3.2). В частотной и частотно-волновой областях (разд. 3.4) реализация УФХН и АМФ базируется на переходе от дискретных последовательностей на выходах элементов АР к их одно- и двумерным Фурье-изображениям, а также использовании значений последних для дискретных величин временных и пространственных частот.

Остальные блоки системы (см. рис. 4.1) относятся к схеме обработки скалярного процесса по выходу сумматора многомерного фильтра. Первым блоком этой части системы является СФ, КХЧ которого, в зависимости от типа используемого алгоритма многомерного фильтра, определяется выражениями (3.1.8) или (3.2.5); функция СФ – оптимизация процесса с учетом частотных (временных) свойств сигнала и шума на его входе. СФ представляет собой последний блок линейной части системы. Его выходом является оптимально профильтрованный (как по пространству, так и по времени) процесс, подлежащий далее квадратичному детектированию (блок КД) и низкочастотной фильтрации (блок ФНЧ) на заданном интервале наблюдения, что и завершает схему оптимального энергетического обнаружителя. СФ может быть реализован во временной области (как нерекурсивный или рекурсивный цифровой фильтр) или же в частотной. ФНЧ проще всего реализуется в виде рекурсивного фильтра первого порядка – цифрового аналога интегрирующей RC-цепочки.

Методика контролируемого выбора параметров цифровой адаптивной СПВО. Эффективность цифровой системы существенно зависит от ее параметров, определяющих частоту дискретизации входной информации, характеристики многомерного и скалярного фильтров, разрядности АЦП и цифровых устройств системы. Чем жестче требования к указанным параметрам, тем меньше погрешности цифровой обработки, но сложнее аппаратура. Поэтому выбор параметров цифровой системы необходимо осуществлять на основе количественной оценки ухудшения основного критерия – помехоустойчивости системы по сравнению с помехоустойчивостью некоторой эталонной системы. В качестве последней удобно принять оптимальную СПВО, обеспечивающую для данной ситуации потенциально достижимую помехоустойчивость. Таким образом, для оценки влияния параметров цифровой адаптивной СПВО на ее помехоустойчивость необходимо установить количественную связь между этими величинами. Для этого необходимо построить математическую модель цифровой адаптивной СПВО, которая бы позволила выразить выходное отношение с/ш в функции параметров системы, выбираемых при проектировании. Современное состояние теории цифровых систем позволяет построить такую модель, так как СПВО состоит из ряда типовых блоков (АЦП и цифровых фильтров различного типа), модели которых описаны в литературе [12, 36, 51, 54]. Методика учета погрешностей, порожденных цифровой обработкой, а также выбора параметров

цифровых систем управления и обработки информации изложена в работе [17]. Далее в разд. 4.4 строятся расчетные модели как отдельных цифровых блоков СПВО, так и всей системы в целом.

4.2. Особенности представления дискретных сигналов и систем

Развитие теории дискретных процессов и систем связано с необходимостью практического использования импульсных систем [75] и широким применением цифровой обработки сигналов [12, 51, 54, 73]. Дискретные представления используются также в методах обработки временных рядов [7, 24]. Рассмотрим кратко существо методов математического описания дискретных сигналов и систем и их отличия от соответствующего описания непрерывных сигналов и систем.

Представление дискретных сигналов. Основой частотного описания таких сигналов является дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Положим, что задан дискретный сигнал $x(n\Delta)$, где Δ — интервал между дискретами, а n — целое число, тогда его ДПФ [75]

$$\tilde{X}^*(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta) e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n}, \quad (4.2.1)$$

которое существует, если ряд сходится абсолютно. Выражение для обратного ДПФ определяется путем умножения обеих частей равенства (4.2.1) на $\exp(j \cdot 2\pi f \Delta m)$ ($m=0, \pm 1, \dots$) и интегрирования по f в интервале $(-1/2\Delta, 1/2\Delta)$, что дает

$$x(n\Delta) = \Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} \tilde{X}^*(f) e^{j \cdot 2\pi f \Delta n} df. \quad (4.2.2)$$

Преобразование (4.2.1) называют двусторонними ДПФ; в одностороннем ДПФ нижний предел суммирования равен нулю.

Главное свойство спектра $\tilde{X}^*(f)$ дискретного сигнала, отличающее его от спектра аналогового сигнала, заключается в том, что он является периодической функцией частоты: из (4.2.1) следует, что $\tilde{X}^*(f+k/\Delta) = \tilde{X}^*(f)$ (k — целое число). Основным интервалом спектров дискретных сигналов принято называть интервал частот $-1/2\Delta \leq f < 1/2\Delta$.

Для практического применения важное значение имеют правила ДПФ, устанавливающие связь между операциями, выполняемыми в областях оригиналов и их изображений. Приведем те из них, которые понадобятся в дальнейшем для описания функциональных блоков цифровой СПВО (эти правила можно доказать их прямой проверкой).

Изображение разности

$$\tilde{\mathcal{F}}^* \{x(n\Delta) - x(n\Delta - \Delta)\} = (1 - e^{-j \cdot 2\pi f \Delta}) \tilde{X}^*(f), \quad (4.2.3)$$

где $\tilde{\mathcal{F}}^* \{ \dots \}$ — оператор ДПФ (4.2.1), а $\tilde{X}^*(f) = \tilde{\mathcal{F}}^* \{x(n\Delta)\}$.

Изображение суммы

$$\tilde{\mathcal{F}}^* \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} x(m\Delta) \right\} = (1 - e^{-j \cdot 2\pi f \Delta})^{-1} \tilde{X}^*(f). \quad (4.2.4)$$

Свертка во временной области: если $\tilde{X}^*(f) = \tilde{\mathcal{F}}^* \{x(n\Delta)\}$ и $\tilde{Y}^*(f) = \tilde{\mathcal{F}}^* \{y(n\Delta)\}$, то

$$\Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} \tilde{X}^*(f) \tilde{Y}^*(f) e^{j \cdot 2\pi f \Delta n} df = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\Delta) y(n\Delta - m\Delta), \quad (4.2.5)$$

т. е. изображению $\tilde{X}^*(f) \tilde{Y}^*(f)$ отвечает оригинал, определяемый правой частью формулы (4.2.5) — сверткой оригиналов $x(n\Delta)$ и $y(n\Delta)$.

Свертка в частотной области: для оригиналов $x(n\Delta)$ и $y(n\Delta)$ справедливо равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta) y(n\Delta) e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n} = \Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} \tilde{X}^*(\lambda) \tilde{Y}^*(f - \lambda) d\lambda, \quad (4.2.6)$$

т. е. оригиналу $x(n\Delta) y(n\Delta)$ отвечает изображение, определяемое правой частью выражения (4.2.6) — сверткой изображений $\tilde{X}^*(f)$ и $\tilde{Y}^*(f)$. Равенство Парсеваля [следует из формулы (4.2.6) при $f=0$]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta) y(n\Delta) = \Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} \tilde{X}^*(f) \tilde{Y}^{\bar{}}(f) df, \quad (4.2.7)$$

где $\tilde{Y}^{\bar{}}(f)$ — изображение, комплексно сопряженное с $\tilde{Y}^*(f)$; если $y(n\Delta) = x(n\Delta)$, то из равенства (4.2.7) получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n\Delta) = \Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} |\tilde{X}^*(f)|^2 df. \quad (4.2.8)$$

Рассмотрим связь между изображениями Фурье непрерывного (аналогового) сигнала $x(t)$ и дискретного сигнала $x(n\Delta)$, полученного из $x(t)$ для $t=n\Delta$. Преобразование Фурье аналогового сигнала $x(t)$ есть

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j \cdot 2\pi f t} dt. \quad (4.2.9)$$

Из сравнения изображений [см. (4.2.1) и (4.2.9)] следует, что изображения $X(f)$ и $\tilde{X}^*(f)$ аналогового $x(t)$ и соответствующего ему дискретного сигнала связаны предельной зависимостью

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0, n\Delta \rightarrow t} \Delta \cdot \tilde{X}^*(f) = X(f). \quad (4.2.10)$$

Следовательно, если $\Delta \rightarrow 0$, но при этом $n \rightarrow \infty$ и $n\Delta \rightarrow t$, то дискретный сигнал $x(n\Delta)$ превращается в непрерывный сигнал и имеет место предельный переход (4.2.10). С учетом этого предельного перехода из формулы (4.2.2) для обратного ДПФ имеем

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0, n\Delta \rightarrow t} x(n\Delta) = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j \cdot 2\pi f t} df, \quad (4.2.11)$$

т. е. обычное выражение для обратного преобразования Фурье непрерывного сигнала.

Существует и прямая связь между изображениями $X(f)$ и $\tilde{X}(f)$. Для ее установления воспользуемся формулой обратного преобразования Фурье (4.2.11), определяющей оригинал $x(t)$ по известному изображению $X(f)$, где примем $t = n\Delta$,

$$x(n\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j \cdot 2\pi f n\Delta} df.$$

Подставим в формулу ДПФ (4.2.1) вместо $x(n\Delta)$ правую часть последнего выражения, заменив в ней f на λ . В результате находим

$$\tilde{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j \cdot 2\pi \Delta (\lambda - f)n} d\lambda.$$

Сумма в этом выражении определяет представление рядом Фурье последовательности дельта-функций [65]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j \cdot 2\pi \Delta (\lambda - f)n} = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - f - n/\Delta).$$

Подставив это равенство в предыдущую формулу, окончательно находим

$$\tilde{X}(f) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f + n/\Delta). \quad (4.2.12)$$

Периодичность (с периодом $1/\Delta$) спектра $\tilde{X}(f)$ обусловлена тем, что он образован бесконечной суммой [см. (4.2.12)] спектров $X(f)$ непрерывного сигнала, сдвинутых на величину частоты, кратную $1/\Delta$.

На практике переход от непрерывного сигнала $x(t)$ к дискретному $x(n\Delta)$ осуществляется с помощью импульсного элемента (ИЭ), а сам процесс дискретизации описывается с помощью модели амплитудно-импульсной модуляции [17, 75]. В такой идеализированной модели выходом ИЭ является последовательность дельта-функций, каждая из которых имеет вес, определяемый дискретным значением аналогового сигнала $x(t)$ в момент $t = n\Delta$; эта модель приводит к той же зависимости (4.2.12) между спектрами непрерывного и дискретного сигналов.

Основное свойство спектров дискретных сигналов — их периодичность — определяется тем, что величина выхода ИЭ зависит только от значений непрерывного сигнала в дискретные моменты времени $t = n\Delta$ и не зависит от его значений между ними. Возникает „перепутывание” частот, когда различным гармоническим сигналам, частоты которых различаются на величину, кратную частоте дискретизации $f_{\Delta} = 1/\Delta$, отвечает одна и та же дискретная последовательность. Таким образом, частотный спектр $\tilde{X}(f)$ дискретного сигнала определяется не только спектром $X(f)$ соответствующего аналогового сигнала, но и величиной интервала дискретизации Δ , являющегося важнейшим параметром цифровой системы.

Спектр $\tilde{X}(f)$ тем ближе к спектру $X(f)$, чем меньше величина Δ , однако при этом ужесточаются требования к быстродействию средств цифровой техники.

Все реальные аналоговые сигналы и процессы имеют неограниченные частотные спектры, что не позволяет принять некоторую конечную граничную верхнюю частоту $f_{\text{в}}$ и взять частоту дискретизации $f_{\Delta} = 2f_{\text{в}}$, так как такой конечной частоты $f_{\text{в}}$ не существует, поэтому невозможно и равенство $\tilde{X}(f) = 1/\Delta X(f)$ для полосы частот $|f| \leq f_{\Delta}/2$. Не меняет положения и аналоговый низкочастотный фильтр, используемый обычно на входе АЦП, так как любой реальный фильтр имеет конечную крутизну спада АЧХ. Из изложенного видно, что спектр $\tilde{X}(f)$ дискретного сигнала может быть определен двумя способами: во-первых, с помощью формулы (4.2.1) путем задания исходного непрерывного сигнала $x(t)$ и перехода далее к дискретному сигналу $x(n\Delta)$; во-вторых, с помощью выражения (4.2.12) на основе задания спектра $X(f)$ исходного непрерывного сигнала. В обоих случаях необходимо вычислять бесконечные суммы, что может привести к непреодолимым трудностям.

В практике гидроакустики принято задавать спектральные характеристики [68], поэтому возникает необходимость использования формулы (4.2.12). Если сумма этого бесконечного ряда не может быть определена, то для вычисления спектра $\tilde{X}(f)$ при значении частоты f в основной полосе $|f| \leq f_{\Delta}/2 = 1/2 \Delta$ приходится находить сумму соответствующего конечного ряда

$$\tilde{X}(f) \approx f_{\Delta} \sum_{k=-k_0}^{k_0} X(f + k/\Delta). \quad (4.2.13)$$

Чтобы это выражение и при конечном k_0 определяло спектр $\tilde{X}(f)$, являющийся периодической (с периодом $1/\Delta = f_{\Delta}$) функцией частоты, необходимо задать для спектра $X(f)$ некоторую фиктивную граничную частоту $f_{\text{в}} = (k_0 + 1/2) f_{\Delta}$, где f_{Δ} — принятая частота дискретизации; k_0 — число „хвостов” сдвинутых спектров $X(f + k f_{\Delta})$, попадающих в полосу $|f| \leq f_{\Delta}/2$ (при $k_0 = 0$ имеем обычное соотношение $f_{\text{в}} = f_{\Delta}/2$, при $k_0 = 1$ $f_{\text{в}} = 3f_{\Delta}/2$ и т. д.). Выбор частоты дискретизации f_{Δ} практически осуществляется следующим образом. Задается некоторое значение k_0 и выполняется расчет спектра $\tilde{X}(f)$ [см. (4.2.13)], далее оценивается

близость характеристик спектров $\dot{X}(f)$ и $X(f)$ в полосе частот $|f| \leq f_d/2$ и исходя из особенностей рассматриваемой задачи принимает решение об удовлетворительности принятой величины f_d . В случае если сигнал полосовой, т. е. его спектр отличен от нуля в полосе шириной f_d с центральной частотой f_0 , причем $f_0 > F/2$ (т. е. $f_0 - F/2 \leq |f| \leq f_0 + F/2$), то существуют специальные рациональные приемы дискретизации таких сигналов [47].

В практике цифровой обработки важную роль имеют сигналы конечной длительности, на основе которых с помощью алгоритма БПФ реализуется процедура их частотного анализа. Конечный дискретный сигнал $x(n\Delta)$ тождественно равен нулю вне конечного интервала $0 \leq n \leq N-1$, т. е. задан N своими значениями. Поэтому его ДПФ [см. (4.2.1)]

$$\dot{X}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta) e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n}, \quad (4.2.14)$$

причем спектр дискретного конечного сигнала $\dot{X}(f)$ также является периодической функцией частоты, определенной в интервале $[-1/2\Delta, 1/2\Delta)$. Ряд (4.2.14) – конечный, поэтому для любого значения частоты $f \in [-1/2\Delta, 1/2\Delta)$ может быть вычислен спектр $\dot{X}(f)$. Это удобно делать для дискретных значений частоты $f = k/T$, где $T = N\Delta$ – длительность интервала $[0, T)$, на котором задан сигнал $x(n\Delta)$. Так как спектр $\dot{X}(f)$ есть периодическая функция f с периодом $1/\Delta$, то функция $\dot{X}_k = \dot{X}(f)|_{f=k/T}$ целочисленной переменной k имеет период, равный N , т. е. $\dot{X}_{k+rN} = \dot{X}_k$, где $k, r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и $\dot{X}_{-k} = \dot{X}_{N-k} = \dot{X}_k$. На практике принято определять дискретные частотные составляющие на интервале $(0, 1/\Delta)$, для $0 \leq k \leq N-1$; из указанного свойства периодичности \dot{X}_k следует, что для $k \geq N/2$ справедливо равенство $\dot{X}_k = \dot{X}_{k-N}$, а поэтому выражение (4.2.14) при $f = k/N\Delta$ приобретает вид

$$\dot{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} kn\right), \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (4.2.15)$$

где $x_n = x(n\Delta)$.

Дискретизация сигнала по времени с интервалом $\Delta = T/N$ и его спектра с интервалом (разрешением) по частоте $1/T = 1/N\Delta$ имеет определяющее значение для частотного анализа дискретных сигналов, так как в этом случае комплексная экспоненциальная функция $\exp(j \cdot 2\pi ft)$ при $f = k/N\Delta$ и $t = n\Delta$ порождает систему дискретных экспоненциальных функций $\{\exp[j(2\pi/N)kn]\}$ (где k, n – целые числа), ортогональных на интервале $0 \leq n, k \leq N-1$. Их использование позволяет осуществить обратный переход от частотных составляющих спектра \dot{X}_k к дискретным значениям сигнала x_n . Действительно, умножив обе части равенства (4.2.15) на $\exp[j(2\pi/N)mk]$ и просуммировав по k от 0 до $N-1$, получаем

$$x_n = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}_k \exp[j(2\pi/N)nk], \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (4.2.16)$$

[ср. с выводом (4.2.2)]. Если в формуле (4.2.16) принять $n \geq N$, то всегда можно выделить часть числа n , кратную N . Следовательно, $n = Nq + d$, где q целое число и $0 \leq d \leq N-1$, т. е. d равно значению числа n по модулю числа N , что записывается в виде $d = ((n))_N$. Поэтому ядро преобразования в (4.2.16) принимает вид $\exp[j(2\pi/N)dk]$, и получаем величину $x_{((n))_N}$, где $0 \leq ((n))_N \leq N-1$. На практике это означает, что в результате перехода от спектра $\dot{X}(f)$, являющегося непрерывной функцией частоты, к его дискретным значениям \dot{X}_k – линейчатому спектру, исходный конечный дискретный сигнал x_n оказывается периодически продолженным с периодом, равным N , так что периодически продолженный сигнал $\tilde{x}_n = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_{n+qN}$. Нетрудно показать

[51, 54], что величина частотного разрешения $1/T = 1/N\Delta$, принятая при определении преобразования (4.2.15), обеспечивает на интервале периодичности $0 \leq n \leq N-1$ совпадение исходного аperiodического конечного сигнала x_n и периодического сигнала \tilde{x}_n . Выражения (4.2.15) и (4.2.16) представляют собой пару конечных преобразований (дискретного сигнала и его дискретного спектра) и образуют пару соотношений, называемых конечными преобразованиями Фурье (КПФ). Это название [18] объясняется фундаментальной особенностью такого преобразования – его определением на конечном множестве точек $0 \leq n, k \leq N-1$.

Интересно отметить, что КПФ по своему существу отвечает способу приближенного представления конечного аналогового сигнала и его спектра с помощью дискретных отсчетов во временной и частотной областях, традиционно используемому при решении радиотехнических задач. Если сигнал $x(t)$ ограничен во времени областью $|t| \leq T/2$, а его энергия в основном сосредоточена в полосе частот $|f| \leq F$, причем $FT \gg 1$, то на основе прямой и обратной теорем Котельникова сам сигнал и его спектр могут быть представлены приближенно с помощью $2FT$ значений, взятых соответственно с шагом $1/2F$ и $1/T$:

$$x(t) \approx \sum_{n=-FT}^{FT} x\left(\frac{n}{2F}\right) \frac{\sin 2\pi F(t - n/2F)}{2\pi F(t - n/2F)};$$

$$X(f) \approx \sum_{k=-FT}^{FT} X\left(\frac{k}{T}\right) \frac{\sin \pi T(f - k/T)}{\pi T(f - k/T)}.$$

На практике возникает необходимость преобразования временных отсчетов $x(n/2F)$ в частотные $X(k/T)$ и наоборот. В предположении об ограниченности спектра конечного сигнала из выражений (4.2.12) и (4.2.1) получаем

$$X(f) \approx \frac{1}{2F} \dot{X}(f) \approx \frac{1}{2F} \sum_{n=-FT}^{FT} x\left(\frac{n}{2F}\right) \exp\left(-j \frac{\pi}{F} fn\right),$$

а используя представление сигнала $x(t)$ конечным рядом Фурье, имеем

$$x(t) \approx \frac{1}{T} \sum_{k=-FT}^{FT} X\left(\frac{k}{T}\right) \exp\left(j \frac{2\pi}{T} t k\right)$$

Положив в этих формулах $f = k/T$, а $t = n/2F$, получаем

$$X\left(\frac{k}{T}\right) \approx \frac{1}{2F} \sum_{n=-FT}^{FT} x\left(\frac{n}{2F}\right) \exp\left(-j \frac{\pi}{FT} kn\right);$$

$$x\left(\frac{n}{2F}\right) \approx \frac{1}{T} \sum_{k=-FT}^{FT} X\left(\frac{k}{T}\right) \exp\left(j \frac{\pi}{FT} nk\right)$$

Если обозначить $2FT = N$, т. е. $FT = N/2$, а верхний предел в последних формулах взять равным $FT - 1$ (что допустимо, так как $FT \gg 1$), то нетрудно преобразовать эти формулы в основные соотношения КДФ [см. (4.2.15) и (4.2.16)] (при этом нужно учесть, что в соответствии с (4.2.12) $\tilde{X}_k^* = 2F X(k/T)$, а также перейти к положительным значениям переменных n и k). Вышеизложенное объясняет ту огромную роль, которую играет использование КДФ в практике цифровой обработки, осуществляемое с помощью алгоритма БДФ. Фактически КДФ [18] решает классическую задачу гармонического анализа сигналов. Как и любое функциональное преобразование, КДФ имеет ряд правил, устанавливающих связь между операциями в областях оригиналов и их изображений. Приведем некоторые из них, которые понадобятся в дальнейшем.

Свертка во временной области. Если $\tilde{X}_k^* = F^* \{x_n\}$ и $\tilde{Y}_k^* = F^* \{y_n\}$, где $F^* \{ \dots \}$ — оператор прямого КДФ (4.2.15), то

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_k^* \tilde{Y}_k^* e^{j \frac{2\pi}{N} nk} = \sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{((n-m))_N} \quad (4.2.17)$$

Изображению $\tilde{X}_k^* \tilde{Y}_k^*$ отвечает оригинал, определяемый правой частью формулы (4.2.17), т. е. периодической (круговой) сверткой последовательностей x_n и y_n .

Свертка в частотной области. Для оригиналов x_n и y_n справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_l^* \tilde{Y}_{((k-l))_N}^*, \quad (4.2.18)$$

где оригиналу $x_n y_n$ отвечает изображение, определяемое правой частью (4.2.18), т. е. периодической сверткой изображений \tilde{X}_k^* и \tilde{Y}_k^* .

Равенство Парсеваля [следует из формулы (4.2.18) при $k=0$]

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_k^* \tilde{Y}_k^* \quad (4.2.19)$$

Если $y_n = x_n$, то отсюда получаем

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{X}_k^*|^2 \quad (4.2.20)$$

Различие свойств КДФ и ДДФ [ср. выражения (4.2.17) — (4.2.20) с (4.2.5) — (4.2.8)] обусловлено периодичностью дискретного сигнала, определяемого с помощью обратного КДФ (4.2.16).

Дискретные динамические системы. Такие системы описываются некоторым оператором $L^* \{ \dots \}$, связывающим входную $x(n\Delta)$ и выходную $y(n\Delta)$ дискретные последовательности, так что $y(n\Delta) = L^* \{x(n\Delta)\}$. Если система линейная, то для нее справедлив принцип суперпозиции, и она может быть описана реакцией на единичный дискретный импульс

$$\delta_0(n\Delta - m\Delta) = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n; \\ 0 & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

Такая реакция есть ИХ дискретной системы $h(n\Delta, m\Delta)$, определяющая ее выходную величину в момент $n\Delta$, когда единичный импульс приложен в момент $m\Delta$, т. е. $h(n\Delta, m\Delta) = L^* \delta_0(n\Delta - m\Delta)$. Тогда для произвольной входной величины $x(n\Delta)$ имеем

$$y(n\Delta) = L^* \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m\Delta) \delta_0(n\Delta - m\Delta) \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n\Delta, m\Delta) x(m\Delta).$$

Если система стационарна, то $h(n\Delta, m\Delta) = h(n\Delta - m\Delta)$, т. е. реакция системы в момент $n\Delta$ на воздействие, приложенное в момент $m\Delta$, зависит лишь от интервала между этими моментами $(n - m)\Delta$. Для стационарной системы

$$y(n\Delta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n\Delta - m\Delta) x(m\Delta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m\Delta) x(n\Delta - m\Delta). \quad (4.2.21)$$

Система является физически возможной, если ее реакция не опережает входное воздействие, т. е. необходимо, чтобы $h(n\Delta - m\Delta) = 0$ при $n < m$, и свертка (4.2.21) принимает вид

$$y(n\Delta) = \sum_{m=-\infty}^n h(n\Delta - m\Delta)x(m\Delta) = \sum_{m=0}^{\infty} h(m\Delta)x(n\Delta - m\Delta). \quad (4.2.22)$$

Если, как это бывает для реальных процессов, входное воздействие $x(n\Delta) = 0$ при $n < 0$, то

$$y(n\Delta) = \sum_{m=0}^n h(n\Delta - m\Delta)x(m\Delta) = \sum_{m=0}^n h(m\Delta)x(n\Delta - m\Delta), \quad (4.2.23)$$

однако для физически возможных систем и реальных (каузальных) сигналов можно также пользоваться общими зависимостями (4.2.21), учитывая при этом указанные выше ограничения.

На практике различают два вида дискретных систем: с конечной ИХ когда ИХ $h(n\Delta)$ тождественно равна нулю вне некоторого конечного интервала $0 \leq n \leq N-1$ (сокращенно КИХ-системы); с бесконечной ИХ когда ИХ $h(n\Delta)$ не ограничена конечным интервалом и $-\infty < n < \infty$ (сокращенно БИХ-системы). Дискретная линейная стационарная система описывается также разностным уравнением с постоянными коэффициентами, связывающим между собой входную $x(n\Delta)$ и выходную $y(n\Delta)$ величины и их прошлые значения. Разностное уравнение вида

$$y(n\Delta) = \sum_{m=1}^L a_m x(n\Delta - m\Delta) \quad (4.2.24)$$

описывает так называемые нерекурсивные системы (фильтры), обычно это КИХ-системы. Здесь выходная величина определяется лишь прошлыми значениями входной величины. Разностное уравнение вида

$$y(n\Delta) = \sum_{m=1}^L a_m x(n\Delta - m\Delta) - \sum_{m=1}^M b_m y(n\Delta - m\Delta) \quad (4.2.25)$$

описывает так называемые рекурсивные фильтры, обычно это БИХ-системы. Здесь выходная величина описывается как предыдущими значениями входной величины, так и предыдущими значениями самой выходной величины. Рекурсивный фильтр в отличие от нерекурсивного является замкнутой системой.

Для описания линейных стационарных дискретных систем широко используются частотные характеристики, так как реакция дискретной системы на дискретное же синусоидальное воздействие представляет собой синусоиду той же частоты, а ее амплитуда и фаза определяются собственно свойствами системы. Так, если $x(n\Delta) = \exp(j2\pi f\Delta n)$, то из уравнения (4.2.21) получаем, что $y(n\Delta) = x(n\Delta)\hat{H}^*(f)$, где

$$\hat{H}^*(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n\Delta) e^{-j \cdot 2\pi f\Delta n} \quad (4.2.26)$$

есть КЧХ дискретной системы, являющаяся ДПФ ее ИХ. КЧХ выражается через свои действительную и мнимую части $\hat{R}^*(f)$ и $\hat{I}^*(f)$, а также АЧХ $\hat{A}^*(f)$ и ФХЧ $\hat{\Phi}^*(f)$ (периодические функции частоты с периодом $1/\Delta$). Если ДПФ входного воздействия $x(n\Delta)$ в общем случае есть $\hat{X}^*(f)$, то ДПФ выходной величины $y(n\Delta)$ есть $\hat{Y}^*(f) = \hat{H}^*(f)\hat{X}^*(f)$. Используя обратное ДПФ [см. (4.2.2)], можно найти выходную величину $y(n\Delta)$.

С появлением алгоритма БПФ частотные характеристики стали использоваться не только для теоретических исследований, но и на практике. В результате классическая процедура частотной фильтрации $\hat{Y}^*(f) = \hat{H}^*(f)\hat{X}^*(f)$ сводится к реализации этого соотношения для дискретных частотных составляющих $\hat{Y}_k^* = \hat{H}_k^* \hat{X}_k^*$, где $k=0, 1, \dots, N-1$; \hat{X}_k^* — КПФ входной последовательности x_n ($n=0, 1, \dots, N-1$), вычисляемое с помощью алгоритма БПФ; \hat{H}_k^* — КПФ ИХ системы h_n , или же это частотные значения \hat{H}_k^* заданной КЧХ $\hat{H}^*(f)$ на дискретных частотах $f_k = k/N\Delta$. Далее возможно два варианта использования частотных составляющих выходной величины \hat{Y}_k^* . Если дальнейшая обработка осуществляется в частотной области, то используются сами величины \hat{Y}_k^* (так, например, сумма по k величин $|\hat{Y}_k^*|^2$ определяет в соответствии с выражением (4.2.20) энергию профильтрованной входной последовательности x_n); если же дальнейшая обработка выполняется во временной области, то от последовательности частотных составляющих \hat{Y}_k^* с помощью обратного КПФ [см. (4.2.16)] (используя алгоритм БПФ) переходят к временной последовательности y_n . Так как в этом случае реализуется процедура периодической свертки [см. (4.2.17)], то для обеспечения идентичности ее результатов результатам аперiodической свертки существуют специальные приемы [51, 54].

4.3. Способы учета погрешностей аналого-цифрового преобразования входной информации и ошибок арифметических действий

Математическое описание процесса аналого-цифрового преобразования. Основой такого описания является представление АЦП в виде безынерционного многоступенчатого элемента со статической (функциональной характеристикой, определяемой выражением

$$y = q \left\{ \sum_{i=1}^{2^m-1} U[|x| - (i-1/2)q] \right\} \text{sign } x, \quad \text{где } U(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z > 0; \\ 0 & \text{при } z < 0, \end{cases} \quad (4.3.1)$$

где x и y — входная и выходная величины АЦП; q — шаг квантования входной величины по уровню; m — число разрядов АЦП без учета зна-

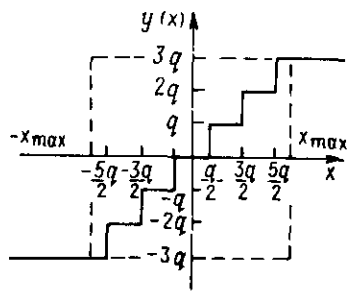


Рис. 4.2

кового разряда. Рис. 4.2 иллюстрирует зависимость (4.3.1) для случая $m=2$. Сетка уровней измеряемой величины характеризуется значениями $x = \pm \frac{q}{2}, \pm \frac{3}{2}q, \dots, (2^m - 3/2)q$. Из величины $\pm x_{\max} = \pm (2^m - 1)q$, определяющей шкалу цифрового преобразования, находим шаг квантования

$$q = x_{\max} / (2^m - 1). \quad (4.3.2)$$

Существующие разновидности математических моделей АЦП основаны на различных способах использования зависимости (4.3.1) для выражения вероятностных характеристик выходного процесса через характеристики входного. Положим для определенности, что последний представляет собой гауссов стационарный случайный процесс $x(t)$ с нулевым МО, дисперсией σ_x^2 и нормированной корреляционной функцией $\rho_x(\tau)$. Дискретная последовательность $y(n\Delta)$ на выходе АЦП в соответствии с зависимостью (4.3.1) имеет нулевое МО и корреляционную функцию [65]

$$r_y(\nu\Delta) = q^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=-2^{m+1}}^{2^m-2} \Phi^{(k)} \left[\left(i + \frac{1}{2} \right) \frac{q}{\sigma_x} \right] \right\}^2 \times \frac{\rho_x^k(\nu\Delta)}{k!}, \quad (4.3.3)$$

где $\Phi^{(k)}(x)$ — k -я производная (k — нечетное число) функции $\Phi(x)$ — интеграла вероятности [см. (2.1.51)]; Δ — интервал дискретизации; $\nu = n_2 - n_1$. Спектральная плотность последовательности $y(n\Delta)$ определяется формулой (1.1.12), куда нужно подставить $r_y(\nu\Delta)$. Эта математическая модель АЦП справедлива для входного процесса, изменяющегося в произвольном диапазоне, который здесь удобно выразить в единицах шага квантования q . Так как входной процесс $x(t)$ гауссов, то можно принять, что его максимальное значение $x_{\max} \approx 3\sigma_x$, а поэтому динамический диапазон

$$D = x_{\max}/q = 3\sigma_x/q = 2^m - 1, \quad (4.3.4)$$

где величина

$$\beta = \sigma_x/q = (2^m - 1)/3 \quad (4.3.5)$$

— глубина квантования. Эта величина, как видно из выражения (4.3.3), и является определяющим параметром корреляционной функции процесса на выходе АЦП. Формула (4.3.3) точно описывает процесс аналого-цифрового преобразования даже при $m=1$. Однако при использовании на

входе АЦП устройства автоматической регулировки усиления (АРУ) и величинах $m \geq 3 \div 4$ применение этого выражения неоправданно сложно. В таких случаях удобна другая модель АЦП. Основной предпосылкой построения такой модели АЦП, предложенной в отечественных работах [27, 36, 37], а также в ряде иностранных работ, изложение которых дано в [35], является предположение о том, что АЦП имеет бесконечную разрядную сетку при заданном шаге квантования q . При этом процесс на выходе АЦП $y(t)$ определяют как сумму входной величины $x(t)$ и шума квантования $\epsilon(t)$

$$y(t) = x(t) + \epsilon(t), \quad (4.3.6)$$

где пока удобно рассматривать непрерывное время. Шум квантования порожден преобразованием входной переменной нелинейным элементом с пилообразной статической характеристикой (рис. 4.3) — разностью $y(x) - x = \epsilon(x)$, где $y(x)$ — правая часть равенства (4.3.1). Так как зависимость $\epsilon(x)$ периодическая, ее можно представить рядом Фурье:

$$\epsilon(t) = \frac{q}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin 2\pi k \frac{x(t)}{q}, \quad (4.3.7)$$

где аргумент t играет роль параметра. Указанные выше работы и основаны на определении статистических характеристик шума квантования с помощью ряда (4.3.7). Более ясным и простым представляется подход, предложенный в работе [27] и позволяющий ограничиться использованием одномерной характеристической функции ошибки $\epsilon(t)$.

Найдем корреляционную функцию шума квантования $\epsilon(t)$, используя для этого выражение (4.3.7):

$$r_\epsilon(\tau) = M \{ \epsilon(t) \epsilon(t + \tau) \} = \frac{q^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{km}}{km} M \left\{ \sin 2\pi k \frac{x(t)}{q} \sin 2\pi m \frac{x(t + \tau)}{q} \right\}$$

Если для $m=k$ воспользоваться формулой произведения синусов в фигурных скобках, то [27] при выполнении условия $q \ll \sigma_x$ можно для

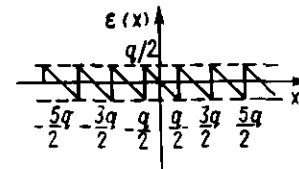


Рис. 4.3

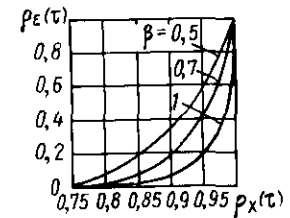


Рис. 4.4

$m = k$ ограничиться суммой разностных членов произведения синусов, опустив сумму суммарных членов для $m = k$ и двойную сумму для $m \neq k$ (так, например, для $\tau = 0$ погрешность определения величины $r_e(0) = \sigma_e^2$ при $\sigma_x/q \geq 0,5$ не превосходит 1% [37]). В таком случае

$$r_e(\tau) \approx \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi k \frac{\eta}{q} f(\eta) d\eta =$$

$$= \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \varphi\left(\frac{2\pi}{q} k\right), \quad (4.3.8)$$

где $f(\eta)$ — плотность распределения приращения $\eta(t) = x(t+\tau) - x(t)$ входного процесса для момента t ; $\varphi\left(\frac{2\pi}{q} k\right)$ — характеристическая функция величины η для значения ее аргумента $2\pi k/q$. Так как характеристическая функция разности $\eta(t)$ есть

$$\varphi\left(\frac{2\pi}{q} k\right) = \exp\left\{-\left(2\pi k \frac{\sigma_x}{q}\right)^2 [1 - \rho_x(\tau)]\right\}, \quad (4.3.9)$$

то из последних двух формул получаем

$$r_e(\tau) = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \exp\left\{-\left(2\pi k \frac{\sigma_x}{q}\right)^2 [1 - \rho_x(\tau)]\right\}. \quad (4.3.10)$$

Дисперсия шума квантования σ_e^2 следует из последней формулы при $\tau = 0$ и $\sigma_e^2 = q^2/12$, а поэтому нормированная корреляционная функция шума квантования

$$\rho_e(\tau) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \exp\left\{-\left(2\pi k \frac{\sigma_x}{q}\right)^2 [1 - \rho_x(\tau)]\right\}. \quad (4.3.11)$$

На рис. 4.4 приведена зависимость ρ_e от ρ_x для различных значений глубины квантования $\beta = \sigma_x/q$ [42]. Эта зависимость показывает, что при $\sigma_x/q \geq 1$ величина ρ_e близка к нулю при значениях ρ_x , близких к единице. Так как $\rho_x(\tau)$ близко к единице при τ , близких к нулю, то интервал корреляции $\tau_{кор\epsilon}$ шума квантования $e(t)$ относительно интервала корреляции $\tau_{корx}$ квантуемого процесса $x(t)$ весьма мал, т. е. функция $\rho_e(\tau)$ существенно „уже“ функции $\rho_x(\tau)$. Если исходить из частотных представлений, то это означает, что шум квантования можно рассматривать как процесс с постоянной спектральной плотностью в полосе частот входного квантуемого процесса, т. е. как белый шум. В работах [27, 37, 42, 65] приводятся оценки характеристик шума кванто-

вания для некоторых функций $\rho_x(\tau)$. Определим интервал $\tau_{кор\epsilon} = \int_0^{\infty} \rho_e(\tau) d\tau$.

Для упрощения вычисления $\tau_{кор\epsilon}$ примем, что процесс $x(t)$ дифференцируем и положим $\rho_x(\tau) \approx 1 + \rho_x''(0)\tau^2/2$, где $\rho_x''(0)$ — вторая производная $\rho_x(\tau)$ при $\tau = 0$. Подставив последнее выражение в формулу (4.3.11) и вычислив табличный интеграл, находим

$$\tau_{кор\epsilon} = \frac{3}{\pi^3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{q}{\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{-\rho_x''(0)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \approx$$

$$\approx 0,146 \frac{q}{\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{-\rho_x''(0)}}.$$

Так, например, если квантуемый процесс $x(t)$ имеет постоянную и отличную от нуля в полосе $|f| \leq F$ спектральную плотность, т. е. $\rho_x(\tau) = \sin 2\pi F\tau/2\pi F\tau$, то величина $\rho_x''(0) = -4\pi^2 F^2/3$, а поэтому из последнего выражения получаем

$$\tau_{кор\epsilon} \approx \frac{1}{24,8} \frac{q}{\sigma_x} \frac{1}{F} = \frac{1}{6,2} \frac{q}{\sigma_x} \frac{1}{4F}.$$

Так как величина $1/4F = \tau_{корx}$ есть интервал корреляции входного процесса $x(t)$, а $q/\sigma_x = 1/\beta$ — величина, обратная глубине квантования, то, учитывая формулу (4.3.5), имеем, что в данном случае соотношение

$$\tau_{кор\epsilon} = \frac{1}{6,2\beta} \tau_{корx} \approx 2^{-(m+1)} \tau_{корx} \quad (4.3.12)$$

позволяет оценить $\tau_{кор\epsilon}$ в долях $\tau_{корx}$ для данного числа m разрядов АЦП.

Таким образом, можно принять, что шум квантования относительно квантуемого процесса представляет собой белый шум — случайный процесс с „узкой“ корреляционной функцией, и для его представления воспользоваться материалом заключительной части разд. 1.1. Исходя из принятого определения интервала корреляции $\tau_{кор\epsilon}$ запишем

$$\tau_{кор\epsilon} = \int_0^{\infty} \rho_e(\tau) d\tau = \frac{1}{2\sigma_e^2} \int_{-\infty}^{\infty} r_e(\tau) d\tau = \frac{g_e(0)}{2\sigma_e^2},$$

где $r_e(\tau) = \sigma_e^2 \rho_e(\tau)$, а $g_e(0)$ — спектральная плотность шума квантования при $f = 0$. Следовательно, в обозначении разд. 1.1 $c = g_e(0) = \sigma_e^2 \cdot 2\tau_{кор\epsilon}$, поэтому

$$r_e(\tau) \approx g_e(0) \delta(\tau) = \frac{q^2}{12} 2\tau_{кор\epsilon} \delta(\tau). \quad (4.3.13)$$

Для полного описания статистических характеристик шума квантования нужно определить корреляционный момент шума квантования и квантуемого процесса $M\{e(t)x(t)\}$. В работе [37] показано, что при $\sigma_x/q \geq 0,5$ величина этого корреляционного момента, нормированного к величине $\sigma_e \sigma_x$, не превосходит 1,5%. Учитывая изложенное, из равенства (4.3.6) получаем выражение для корреляционной функции процесса на выходе АЦП

$$r_y(\tau) = M\{y(t)y(t+\tau)\} \approx r_x(\tau) + \frac{q^2}{12} 2\tau_{\text{кор}e} \delta(\tau). \quad (4.3.14)$$

В статье [99] рассмотрены статистические характеристики шумов квантования $\epsilon_1(t)$ и $\epsilon_2(t)$ двух АЦП, осуществляющих квантование двух входных случайных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Если эти процессы имеют одинаковую дисперсию σ_x^2 и нормированную взаимную корреляционную функцию $\rho_{x_1, x_2}(\tau)$, то взаимная корреляционная функция $r_{\epsilon_1, \epsilon_2}(\tau)$ шумов квантования определяется формулой (4.3.10), где достаточно функцию $\rho_x(\tau)$ заменить на $\rho_{x_1, x_2}(\tau)$. Следовательно, свойства $\rho_{\epsilon_1, \epsilon_2}(\tau)$ определяются свойствами $\rho_{x_1, x_2}(\tau)$ и разрядностью АЦП.

Теперь учтем операцию дискретизации по времени, осуществляемую в АЦП. В заключительной части разд. 1.1 было показано, что для перехода от описания непрерывного случайного процесса с „узкой” корреляционной функцией к описанию соответствующей ему дискретной последовательности удобно использовать понятия непрерывного и дискретного белого шума. Для этого с помощью выражения (1.1.20) следует найти величину спектральной плотности $g_\epsilon^*(0) \approx g_\epsilon(0)/\Delta$; так как в рассматриваемом случае $g_\epsilon(0) = \sigma_\epsilon^2 2\tau_{\text{кор}e}$, то

$$g_\epsilon^*(0) = \sigma_\epsilon^2 \frac{2\tau_{\text{кор}e}}{\Delta} \approx \sigma_\epsilon^2 = \frac{q^2}{12}, \quad (4.3.15)$$

где принято $\Delta = 2\tau_{\text{кор}e}$, что отвечает условию некоррелированности величин $\epsilon(t_1)$ и $\epsilon(t_2)$ для $|t_1 - t_2| \geq \Delta$ (фактически $2\tau_{\text{кор}e} < \Delta$, а поэтому зависимость (4.3.15) является оценкой $g_\epsilon^*(0)$ сверху). Иногда удобно шум квантования приводить с выхода АЦП к его входу, т. е. непрерывному процессу, принимая уровень его спектральной плотности равным $g_\epsilon(0) \approx (q^2/12)\Delta$. Таким образом, для дискретизированных входной и выходной последовательностей АЦП вместо (4.3.14) имеем

$$r_y(\nu\Delta) = r_x(\nu\Delta) + \frac{q^2}{12} \delta_0(\nu\Delta), \quad (4.3.16)$$

где функция $\delta_0(\nu\Delta)$ определена формулой (1.1.19). Перейдя в частотную область, на основании зависимости (1.1.12) находим

$$g_y^*(f) = g_x^*(f) + g_\epsilon^* = g_x^*(f) + q^2/12; \quad |f| \leq 1/2\Delta, \quad (4.3.17)$$

где спектральная плотность шума квантования $g_\epsilon^* = q^2/12 = 3\sigma_x^2 2^{-2(m+1)}$. Таким образом, рассмотренная модель шума кванто-

вания отвечает также представлению погрешности ϵ с помощью равномерного распределения на интервале $|\epsilon| \leq q/2$. Заметим, что проведенный выше анализ процесса аналого-цифрового преобразования позволяет понять физическую основу такого подхода, а не постулировать его, как это иногда делается [51, 54]. В работе [51, глава 11] приведены результаты экспериментальной оценки корреляционной функции шума квантования речевого сигнала для $m=8$ и 3.

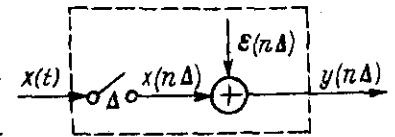


Рис. 4.5

Рассмотренная линейная модель АЦП может быть представлена в виде последовательного соединения импульсного элемента (ключа, замыкающегося с интервалом Δ) и источника шума квантования $\epsilon(n\Delta)$ (рис. 4.5). Выходная дискретная последовательность $y(n\Delta)$ имеет статистические характеристики [см. (4.3.16)].

Выясним, что означает на практике предположение о бесконечности разрядной сетки АЦП, лежащее в основе рассмотренной его модели. Если амплитудные значения входного напряжения $x(t)$ укладываются в размах шкалы цифрового преобразования $\pm x_{\text{max}}$ (отсутствует „краевой эффект”), то без каких-либо погрешностей в описании работы АЦП можно принять, что число его разрядов $m \rightarrow \infty$, т. е. продолжить ступенчатую линию на рис. 4.2 в обе стороны до бесконечности и соответственно продолжить график зависимости погрешности $\epsilon(x)$ (см. рис. 4.3). Для гауссова случайного процесса $x(t)$ его амплитудные значения не ограничены, однако если согласовать шкалу цифрового преобразования со входным процессом на основе „правила трех сигм”, т. е. принять $x_{\text{max}} = 3\sigma_x$, то вероятность краевого эффекта равна 0,27%, чем можно пренебречь. Такое согласование динамического диапазона входного процесса со шкалой цифрового преобразования АЦП реализуется на практике с помощью устройства АРУ, устанавливаемого на входе АЦП [47] и обеспечивающего постоянство уровня мощности на его входе. Таким образом, если величина глубины квантования $\sigma_x/q = \beta \geq 1$ (т. е. в соответствии с формулой (4.3.5) $m \geq 3 \div 4$), на входе АЦП осуществляется автоматическая регулировка усиления, а входной процесс не является существенно узкополосным, то характеристики процесса на выходе АЦП могут быть оценены с помощью зависимости (4.3.15). В таком случае основной характеристикой шума квантования является его дисперсия σ_ϵ^2 , равная в соответствии с формулой (4.3.4) величине

$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{q^2}{12} = \frac{9\sigma_x^2}{12(2^m - 1)^2} \approx 9\sigma_x^2 \frac{2^{-2m}}{12} = 3\sigma_x^2 2^{-2(m+1)}.$$

Отсюда видно, что если определить динамический диапазон АЦП как отношение $\sigma_x^2/\sigma_\epsilon^2$, то его величина имеет порядок $6m$ дБ.

Математическое описание эффектов квантования результатов арифметических действий. Аппаратные и программные средства цифровой вычислительной техники (ЦВТ), реализующие алгоритмы цифровой обработки, оперируют двоичными числами, имеющими конечное число

разрядов. В результате этого возникают ошибки, связанные с округлением результатов арифметических действий в регистрах умножителей и сумматоров. Эти особенности цифровой обработки достаточно подробно освещены в литературе [12, 51, 54, 73], поэтому рассмотрим здесь лишь способы учета эффектов конечной разрядности с позиций общих правил приближенных вычислений, что представляет наибольший интерес для специалистов по обработке информации.

Способы оценки ошибок, возникающих при выполнении арифметических действий, существенно зависят от используемой системы счисления (с плавающей или фиксированной запятой). Рассмотрим второй случай, имеющий наибольшее распространение и ряд характерных особенностей. При использовании фиксированной запятой все исходные и промежуточные числа, а также результаты вычислений не должны по модулю превосходить единицу. В связи с этим перед выполнением арифметических действий (на всех этапах реализации алгоритма) должны быть введены масштабные (нормирующие) множители, предотвращающие возможность переполнения разрядной сетки цифровых устройств. Выбор нормирующих множителей является важной задачей проектирования системы. Правильно выбранный множитель (будем называть его номинальным) должен обеспечить нормируемой величине значение, близкое к единице. Его завышение может привести к переполнению разрядной сетки, т. е. к неверному результату, а занижение — к потере значащих цифр, т. е. к уменьшению точности вычислений. Следует сразу отметить, что устройство АРУ на входе АЦП является блоком реализации масштабного множителя $A_x = (3\sigma_x)^{-1}$, с помощью которого осуществляется нормировка входного аналогового процесса $x(t)$. Следовательно, величина x , выраженная в машинных единицах, такова: $X = A_x x = (3\sigma_x)^{-1} x$, где $|X| \leq 1$.

Рассмотрим теперь методику оценки погрешности, возникающей при перемножении двух чисел и обусловленной конечной разрядностью цифрового умножителя. Пусть, для примера, необходимо умножить гауссову случайную величину x на детерминированную величину w . Положим, что $M\{x\} = 0$, а дисперсия равна σ_x^2 , поэтому можно принять $|x| \leq 3\sigma_x$. Пусть $|w| \leq w_{\max}$. Для вычисления произведения чисел x и w в системе с фиксированной запятой нужно перейти к их выражению в машинных единицах $X = A_x x$ и $W = A_w w$, где $A_x = (3\sigma_x)^{-1}$ и $A_w = w_{\max}^{-1}$. Положим, что числа X и W хранятся в запоминающем устройстве (ЗУ), имеющем $m_{3у}$ двоичных разрядов, а арифметическое устройство (АУ) имеет $m_{АУ}$ разрядов. Точная величина произведения $U = XW$ выражается $2m_{3у}$ разрядами. Если $m_{АУ} \geq 2m_{3у}$, то величину U можно представить точно, если $m_{АУ} < 2m_{3у}$, тогда величина U должна быть округлена или усечена до $m_{АУ}$ разрядов, что приводит к появлению ошибки. Как следует из правил действий с приближенными числами, ошибка округления не превосходит 1/2 единицы сохраняемого разряда, а ошибка усечения не превосходит полной единицы сохраняемого разряда. Ограничимся рассмотрением способа округления, так как методика оценки ошибок усечения аналогична. Обозначим приближенное значение

величины U после округления через \tilde{U} . Тогда ошибка округления в машинных единицах

$$|\Xi| = |U - \tilde{U}| \leq (1/2) 2^{-m} \Delta U. \quad (4.3.18)$$

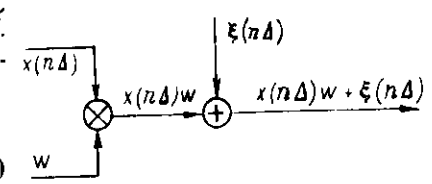


Рис. 4.6

Примем, что ошибка округления Ξ случайна и равномерно распределена на интервале $[-(1/2) \cdot 2^{-m} \Delta U, (1/2) \cdot 2^{-m} \Delta U]$, определяемом величиной младшего сохраняемого разряда $2^{-m} \Delta U$. Кроме того, положим, что значения последовательности $\Xi(n\Delta)$ во времени не коррелированы между собой, а также с последовательностью точных величин $U(n\Delta)$.

Ошибка Ξ произведения $XW = U$, определяемая неравенством (4.3.18), выражена в долях машинной единицы $2^{-m} \Delta U$, являющейся шагом „квантования“ точной величины U . Такая трактовка ошибки округления условна [12], так как ее величину нельзя представить непрерывными значениями — она дискретна в силу дискретности значений произведения U . Переход к шагу „квантования“, выраженному в долях величины точного произведения исходных величин $u = xw$, очевиден: так как $xw = XW (A_x A_w)^{-1} = U 3\sigma_x w_{\max}$, то величина этого шага $q_u = 3\sigma_x w_{\max} X \times 2^{-m} \Delta U$. Поэтому величине ошибки округления ξ , выраженной в исходных единицах, вместо неравенства (4.3.18) отвечает

$$|\xi| = |u - \tilde{u}| \leq \frac{1}{2} \cdot 3\sigma_x w_{\max} \cdot 2^{-m} \Delta U, \quad (4.3.19)$$

а дисперсия ошибки округления ξ равна

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{q_u^2}{12} = \frac{9\sigma_x^2 w_{\max}^2}{12} \cdot 2^{-2m} \Delta U = 3\sigma_x^2 w_{\max}^2 \cdot 2^{-2(m_{АУ} + 1)}. \quad (4.3.20)$$

Таким образом, в первом приближении учет ошибок при округлении сводится к добавлению шума округления $\xi(n\Delta)$ (рис. 4.6), аналогичного по свойствам шуму квантования. Отсюда видно, что влияние нормирующих множителей $3\sigma_x$ и w_{\max} на точность вычислений (неоправданное завышение этих множителей) приводит к увеличению „веса“ $3\sigma_x w_{\max}$ младшего „машинного“ разряда $2^{-m} \Delta U$, определяющего дисперсию абсолютной ошибки округления. Однако от нормирующих множителей также существенно зависит и относительная ошибка. Действительно, если эти множители выбраны правильно, то величины X и W будут иметь число значащих цифр z_x и z_w , равное (или близкое) числу разрядов $АУ$ $m_{АУ}$. Следовательно, и число значащих цифр z_u произведения U будет близко к величине $m_{АУ}$. Действительно, так как $2^{-(m_{АУ} - z_u + 1)} \leq U \leq 2^{-(m_{АУ} - z_u)}$, то относительная ошибка округления

$$\delta_u = \frac{|\Xi|}{U} \leq \frac{2^{-(m_{АУ} + 1)}}{2^{-(m_{АУ} - z_u + 1)}} = 2^{-z_u}. \quad (4.3.21)$$

Если нормирующие множители выбраны правильно, то величина z_u близка к m_{Ay} и $\delta_u \approx 2^{-m_{Ay}}$. Если же эти множители выбраны так, что z_x и z_w меньше m_{Ay} (числа X и W сдвинуты в разрядной сетке вправо, так что происходит потеря значащих цифр), то относительная ошибка по сравнению с $2^{-m_{Ay}}$ увеличивается. Например, при $z_u = 1$ величина $\delta_u = 50\%$, а при $z_u = 0$ (полная потеря значащих цифр) $\delta_u = 100\%$. В последнем случае величина произведения U вообще выходит за разрядную сетку, поэтому его приближенное значение равно машинному нулю и абсолютная ошибка равна, таким образом, точной величине, а относительная ошибка равна 1.

Рассмотрим теперь кратко способ учета погрешностей арифметических действий при вычислении взвешенной суммы $u = \sum_{n=1}^N w_n x_n$, что отвечает реализациям основной процедуры алгоритма многомерной фильтрации [см. (2.5.20)]. Определим нормирующие множители: $A_x = (3\sigma_x)^{-1}$ и $A_w = (\max_n |w_n|)^{-1} = (w_{\max})^{-1}$, а также множитель A_u , формула для определения которого будет получена далее. Произведениям $w_n x_n$ отвечают m_{Ay} -разрядные числа $W_n X_n$, где $W_n = A_w w_n$ и $X_n = A_x x_n$. Чтобы при суммировании чисел $U_n = W_n X_n$ не возникло переполнение разрядной сетки сумматора m_c , эти числа предварительно сдвигают на некоторое число разрядов вправо (умножают на $A_u < 1$), т. е. берут $m_c > m_{Ay}$. Далее полученная m_c -разрядная сумма может быть использована при дальнейшей обработке или же округлена. Положим, для определенности, что сумма округляется до m_{Ay} разрядов, т. е. до числа разрядов исходных суммируемых произведений. В таком случае точное и приближенное значения суммы определяются формулами

$$U = \sum_{n=1}^N W_n X_n; \quad \tilde{U} = \sum_{n=1}^N (W_n X_n + \Xi_n) + A_u^{-1} \cdot \Gamma, \quad (4.3.22)$$

где A_u — нормирующий множитель, учитывающий сдвиг величин $W_n X_n$ на $(m_c - m_{Ay})$ разрядов вправо; Ξ_n — шум округления произведения $W_n X_n$; $A_u^{-1} \Gamma$ — шум округления суммы. Шумы округления, как и остальные величины в формуле (4.3.22), выражены в машинных единицах и ограничены в соответствии с формулой (4.3.18). Определим теперь множитель A_u . Положим, что величины x_n имеют гауссово распределение, $M\{x_n\} = 0$, дисперсию σ_x^2 и коэффициент корреляции $\rho_{nm} = M\{x_n x_m\} / \sigma_x^2$. Приняв, что $|U| \leq 3\sigma_u$, где $\sigma_u^2 = M\{U^2\}$, положим $B_u = (3\sigma_u)^{-1} B_u^{-1}$, где

$$B_u = \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N W_n W_m \rho_{nm} \right)^{1/2} \quad (4.3.23)$$

Результирующий шум, возникающий при вычислении U в цифровом устройстве с ограниченной разрядностью, в соответствии с формулой (4.3.22)

$$\Xi = \tilde{U} - U = \sum_{n=1}^N \Xi_n + B_u \cdot \Gamma \quad (4.3.24)$$

а его дисперсия

$$\sigma_{\Xi}^2 = N \frac{2^{-2m_{Ay}}}{12} + B_u^2 \frac{2^{-2m_{Ay}}}{12}.$$

Переход от дисперсии σ_{Ξ}^2 , выраженной в машинных единицах, к дисперсии σ_{ξ}^2 в исходных единицах аналогичен [см. (4.3.20)], так что

$$\sigma_{\xi}^2 = 3\sigma_x^2 w_{\max}^2 (N + B_u^2) 2^{-2(m_{Ay} + 1)}. \quad (4.3.25)$$

Влияние величин масштабных множителей на относительную ошибку вычисления суммы (4.3.22) аналогично рассмотренному выше для ее слагаемых. Дисперсия σ_{ξ}^2 учитывает арифметические ошибки, возникающие при реализации лишь одного из M фильтров, образующих многомерный фильтр. Для учета всей совокупности ошибок (для многомерного фильтра целиком) достаточно величину σ_{ξ}^2 умножить на M -число компонент многомерного фильтра.

Методика учета арифметических ошибок, обусловленных конечной разрядностью, аналогична и в случае использования усечения — отбрасывания цифр, выходящих за разрядную сетку. Дисперсия ошибки здесь такая же, как и при округлении, однако математическое ожидание при этом не равно нулю и зависит от знака числа [51, 54].

При реализации процедуры обработки в частотной области методика учета арифметических ошибок точно та же, что и рассмотренная выше, но вместо дискретных временных значений процессов используются дискретные частотные значения их Фурье-изображений. Самостоятельной задачей является при этом оценка ошибок собственно вычисления частотных составляющих изображений, определяемых с помощью алгоритма БПФ. На вход спецпроцессора БПФ поступает дискретная последовательность значений x_n , нормированная с помощью множителя $(3\sigma_x)^{-1}$. Если при реализации алгоритма БПФ в системе с фиксированной запятой на каждом этапе его выполнения осуществляется сдвиг на один разряд вправо [51] (чтобы предотвратить переполнение разрядной сетки), то это эквивалентно введению масштабного множителя N^{-1} . В таком случае выражение (4.2.15), определяющее частотные составляющие и учитывающее ошибки округления, удобно записать в виде

$$\hat{X}_k = 3\sigma_x N \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{x_n}{3\sigma_x N} e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} + \Xi_n \right) = \tilde{X}_k + 3\sigma_x N \sum_{n=0}^{N-1} \Xi_n. \quad (4.3.26)$$

Здесь \tilde{X}_k — точное значение частотной составляющей, отвечающее преобразованию (4.2.15) последовательности x_n ; \hat{X}_k — частотная составляющая с учетом ошибок вычислений; Ξ_n — ошибка округления (аналогично зависимости (4.3.18) $|\Xi| \leq 2^{-(m_{БПФ} + 1)}$, где $m_{БПФ}$ — разрядность

спецпроцессора БПФ). В работе [51] показано, что дисперсия погрешности арифметических действий для алгоритма БПФ с принудительным масштабированием (сдвигом) определяется выражением

$$\sigma_{\Xi}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} M \{ \Xi_n \Xi_m \} = (4/3) \cdot 2^{-2m} \text{БПФ}.$$

Переходя от дисперсии σ_{Ξ}^2 в машинных единицах к дисперсии σ_{ξ}^2 в исходных единицах и учитывая выражение (4.3.26), находим

$$\sigma_{\xi}^2 = 9\sigma_x^2 N^2 (4/3) \cdot 2^{-2m} \text{БПФ} = 12\sigma_x^2 N^2 \cdot 2^{-2m} \text{БПФ}. \quad (4.3.27)$$

Шум погрешностей БПФ ξ , определяемый дисперсией (4.3.27), аддитивно, с частотными составляющими \bar{X}_k , поступает на дальнейшую обработку.

Оценим отношение дисперсии σ_{ξ}^2 „шума БПФ“ к „полезному сигналу“ — энергии частотной составляющей на некоторой частоте f_k . Так как $\bar{X}_k = (1/\Delta) X_k$ [см. (1.1.15)], то в соответствии с формулой (1.4.6), где $T = N\Delta$, $M \{ |\bar{X}_k|^2 \} = (N/\Delta) g_x(f_k)$. Здесь $g_x(f)$ — спектральная плотность непрерывного процесса $x(t)$, из которого образуется последовательность $x_n = x(n\Delta)$ на входе спецпроцессора БПФ. Таким образом, находим, что интересующее нас отношение

$$\frac{\sigma_{\xi}^2}{M \{ |\bar{X}_k|^2 \}} = \frac{12\sigma_x^2 N \cdot 2^{-2m} \text{БПФ} \Delta}{g_x(f_k)}, \quad (4.3.28)$$

где числитель этого отношения — уровень спектральной плотности шума БПФ. Из соотношения (4.3.28) следует вывод: так как числитель отношения — уровень спектральной плотности шума БПФ — постоянен для всех частот f_k , а точная величина — спектр $g_x(f_k)$ — зависит от частоты, то при представлении спектра $g_x(f_k)$ в разрядной сетке БПФ малым числом значащих цифр может произойти потеря точности, так как относительная ошибка [см. (4.3.28)] может стать большой [ср. с (4.3.21)]. Обычно спектр $g_x(f)$ спадает в сторону высоких частот, а поэтому при выборе разрядности спецпроцессора БПФ нужно позаботиться о том, чтобы спектр $g_x(f)$ во всем частотном диапазоне был представлен достаточным числом значащих цифр. Уменьшить неравномерность спектра можно путем обеления входного процесса аналоговым способом на входе спецпроцессора БПФ или цифровым — на его выходе.

Следует заметить, что умножение последовательности \bar{x}_n на входе спецпроцессора БПФ на $(3\sigma_x)^{-1}$ хотя и приводит к единичным значениям нормированных максимальных величин x_n , но не гарантирует, что на выходе спецпроцессора БПФ максимальные значения частотных составляющих (определяемые своими „тремя сигмами“) будут также близки к машинной единице. Действительно, пусть входной процесс $\bar{x}(t)$ имеет спектр $g_x(f)$, равный единице в некоторой полосе частот $|f| \leq F$. Спектр $\tilde{g}_x(f)$ нормированного процесса $(3\sigma_x)^{-1} x(t)$ в этой полосе

равен $1/18 F$. Так как частотные составляющие \bar{X}_k^* и \bar{X}_k исходного процесса и процесса, полученного путем сдвигов при выполнении БПФ, связаны соотношением $\bar{X}_k = N^{-1} \bar{X}_k^*$, то $\sigma_x^2 = D \{ N^{-1} \bar{X}_k^* \} = (1/N\Delta) \times \times \tilde{g}_x(f)$. Зная, что для величин $\text{Re } \bar{X}_k$ и $\text{Im } \bar{X}_k$ их дисперсии $\sigma_{\text{Re}}^2 = \sigma_{\text{Im}}^2 = \sigma_x^2/2$, находим, что максимальные значения частотных составляющих $\text{Re } \bar{X}_k$ и $\text{Im } \bar{X}_k$ равны $3\sigma_x/\sqrt{2}$, т. е. величине $\psi = 0,5(N\Delta F)^{-1/2}$. Если принять $\Delta = 1/2 F$, то $\psi = 0,5(N/2)^{-1/2}$, т. е. около $(1/2) \log_2 N$ старших разрядов на выходе спецпроцессора БПФ будут заполнены нулями. Так, если $N = 1024$, то число таких „пустых“ разрядов — порядка пяти. Их число можно уменьшить, если после выполнения БПФ осуществить сдвиг влево или перейти к более сложному варианту алгоритма БПФ — с поблочной плавающей запятой [51].

При реализации алгоритма энергетического обнаружителя в частотной области возможно расширить динамический диапазон использования величин \bar{X}_k , имеющих ограниченную разрядность, если перейти от квадратичного детектирования к линейному и далее приближенно вычислить модуль $|\bar{X}_k|$ [47], т. е. перейти от оптимального алгоритма обнаружения $\sum_k H_k^2 |\bar{X}_k|^2$ (см. разд. 4.2) к алгоритму $\sum_k H_k |\bar{X}_k|$. Так как составляющие \bar{X}_k имеют релеевское распределение [42] (для сигнала оно определяется дисперсией $g_s(f_k)/2$, а для шума — $g_n(f_k)/2$), то математическое ожидание приращения выхода обнаружителя, обусловленного сигналом, есть $(\sqrt{\pi}/2) \sum_k H_k^2 g_s(f_k)/2 g_n^{1/2}(f_k)$ (полагаем $g_s(f) \ll g_n(f)$), а дисперсия выхода, обусловленного шумом, есть $(1 - \pi/4) \sum_k [H_k^2 g_n^{1/2}(f_k)]^2$. Для критерия вида (2.2.14) (в скалярном случае) имеем, что оптимальная АЧХ определяется тем же выражением (2.2.37), где лишь $g_s(f)$ нужно заменить на $g_s(f)/g_n^{1/2}(f)$, а $g_n(f)$ на $g_n^{1/2}(f)$, что дает $H_k = g_s^{1/2}(f_k)/g_n^{3/4}(f_k)$. Отсюда следует, что потеря оптимального отношения с/ш составляет 4%.

4.4. Расчетные модели типовых функциональных блоков цифровой адаптивной СПВО

Модель цифрового устройства формирования ХН. В первом варианте цифрового УФХН [47] напряжения, поступающие с выходов элементов АР, дискретизируются с интервалом δ в несколько раз меньшим, чем $\Delta = 1/2 f_{\text{в}}$, где $f_{\text{в}}$ — верхняя частота входного процесса. В результате временные задержки, необходимые для компенсации АР, реализуются кратными величине δ . Цифровое УФХН содержит блоки памяти (по числу элементов АР), где хранятся временные отсчеты, взятые с шагом δ , из которых путем суммирования образуется выходной сигнал, прореживаемый далее в $I = \Delta/\delta$ раз.

Найдем выражение для ХН, формируемой такой цифровой системой, приняв для простоты, что АР линейная и содержит M ненаправленных

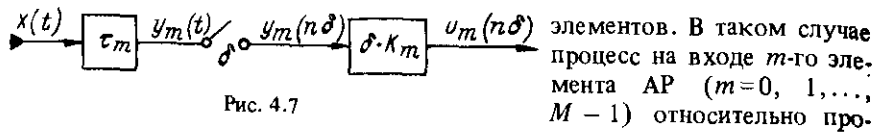


Рис. 4.7

элементов. В таком случае процесс на входе m -го элемента АР ($m=0, 1, \dots, M-1$) относительно процесса на нулевом элементе задержан на время $\tau_m = (md \sin \alpha) / c$ и далее этот процесс должен быть задержан в УФХН на время $\theta_m = [(M-1-m) \sin \alpha_s] / c$. Здесь α и α_s — углы, определяющие соответственно текущее направление прихода плоского фронта сигнала и направление компенсации АР. Рассмотрим обработку в m -м канале УФХН (рис. 4.7), на вход которого поступает процесс $x(t)$, задержанный на время τ_m , т. е. $y_m(t) = x(t - \tau_m)$. Процесс $y_m(t)$ дискретизируется с интервалом δ , образуя последовательность $y_m(n\delta)$, которая далее задерживается на K_m интервалов δ , причем задержке θ_m , квантованной с шагом δ , отвечает целое число $K_m = E[\theta_m / \delta + 0,5]$, ближайшее к величине θ_m / δ , где $E[a]$ — целая часть числа a . Выходная величина $u_m(n\delta) = y_m[(n - K_m)\delta]$. Далее сумма этих величин снимается с выхода цифрового УФХН и прореживается в I раз. Найдем выражение для ХН, отвечающее такой системе. Положим, что спектр входного процесса $x(t)$ ограничен частотой f_B , а частота дискретизации $f_\delta = 1/\delta \gg 2f_B$. В таком случае [см. (4.3.13)] Фурье-изображение процесса $y_m(t)$ в полосе $|f| \leq 1/2\delta$ определяется выражением

$$\dot{Y}_m^*(f) = \frac{1}{\delta} X(f) e^{-j \cdot 2\pi f \tau_m}, \quad (4.4.1)$$

где $X(f)$ — Фурье-изображение реализации процесса $x(t)$, $t \in (0, T)$. Поэтому изображение выходного процесса

$$\dot{U}_m^*(f) = \frac{1}{\delta} X(f) e^{-j \cdot 2\pi f (\tau_m + \delta K_m)}. \quad (4.4.2)$$

Суммируя эти изображения, находим выражение для амплитудной ХН системы с квантованием временной задержки

$$\dot{R}_{as}^*(f) = |\dot{D}_{as}^*(f)| / |\dot{D}_{ss}^*(f)|, \quad (4.4.3)$$

где

$$\dot{D}_{as}^*(f) = \sum_{m=0}^{M-1} \exp[-j \cdot 2\pi f (\tau_m + \delta K_m)],$$

а $\dot{D}_{ss}^*(f)$ определяется аналогично, но при $\alpha = \alpha_s$. Сумма в этой формуле не может быть получена в замкнутом виде даже для линейной АР, так как величина K_m есть нелинейная функция переменной суммирования m , однако получение зависимости $\dot{R}_{as}^*(f)$ от α с помощью ЭВМ трудности не представляет.

Рассмотрим далее цифровое УФХН, использующее интерполяцию [47]. В отличие от предыдущего случая будем обозначать интервал дискре-

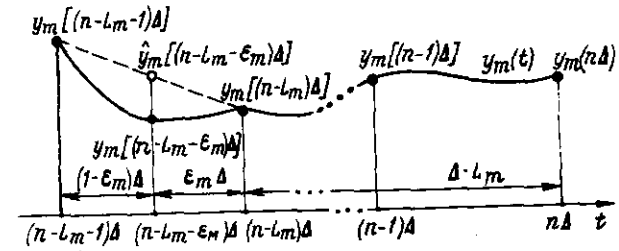


Рис. 4.8

тизации через Δ , т. е. частота дискретизации $f_\Delta = 1/\Delta \geq 2f_B$, и используем пример той же линейной АР, что и выше. Выразим величину временной задержки θ_m , которая должна быть реализована в m -м канале УФХН, в следующем виде: $\theta_m = (L_m + \epsilon_m)\Delta$, где $L_m = E[\theta_m / \Delta]$ — целая часть числа θ_m / Δ ; $\epsilon_m = \theta_m / \Delta - L_m$ — его дробная часть, $0 \leq \epsilon_m < 1$. Рассмотрим задачу интерполяции применительно к цифровому УФХН, что иллюстрируется рис. 4.8. Здесь $y_m(t)$ — процесс на входе АЦП m -канала, $y_m(n\Delta)$ — его дискретные значения на выходе АЦП. Требуемой задержке θ_m отвечает точное значение процесса $y[(n - L_m - \epsilon_m)\Delta]$, а его оценкой, полученной на основе линейной интерполяции, является величина

$$\hat{y}_m[(n - L_m - \epsilon_m)\Delta] = \epsilon_m y_m[(n - L_m - 1)\Delta] + (1 - \epsilon_m) y_m[(n - L_m)\Delta]. \quad (4.4.4)$$

На схеме УФХН с интерполяцией (рис. 4.9) величины на входе АЦП те же, что и на схеме, изображенной на рис. 4.7, а величина $z_m(n\Delta) = y_m[(n - L_m)\Delta]$ является входом блока интерполяции, реализующим алгоритм (4.4.4). Так как изображение $\dot{Y}_m^*(f)$ определяется, как и выше, формулой (4.4.1), где лишь величину δ нужно заменить на Δ , то для изображения выходного процесса $u_m(n\Delta)$ находим

$$\dot{U}_m^*(f) = \frac{1}{\Delta} X(f) e^{-j \cdot 2\pi f (\tau_m + \Delta L_m)} (1 - \epsilon_m + \epsilon_m e^{-j \cdot 2\pi f \Delta}). \quad (4.4.5)$$

Суммируя эти изображения, получаем выражение для амплитудной ХН системы с линейной интерполяцией, определяемое формулой (4.4.3), где

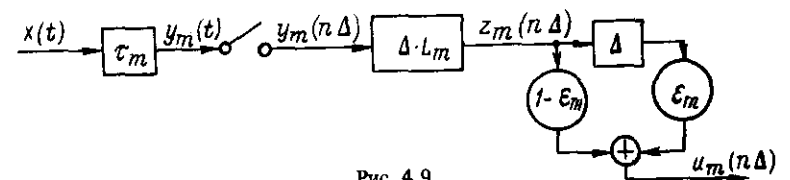


Рис. 4.9

$$\dot{D}_{as}^*(f) = \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j \cdot 2\pi f(\tau_m + \Delta L_m)} (1 - \epsilon_m + \epsilon_m e^{-j \cdot 2\pi f \Delta}). \quad (4.4.6)$$

В формуле (4.4.6) величины L_m и ϵ_m нелинейно зависят от переменной суммирования m , а поэтому сумма не может быть вычислена в замкнутом виде. Отметим [47], что удобно иметь дискретные значения величины ϵ_m ; если принять интервал Δ кратным некоторой величине δ , т. е. $\Delta/\delta = I$, то можно определить числа $i_m = 0, 1, \dots, I$ такие, что $i_m = E[I\epsilon_m + 0,5]$ есть ближайшее целое к $I\epsilon_m$, и заменить величины ϵ_m на i_m/I . Величинам $i_m = 0$ и $i_m = I$ отвечают крайние точки интервала интерполяции $(n - L_m)\Delta$ и $(n - L_m - 1)\Delta$. В таком случае формула (4.4.6) принимает вид

$$\dot{D}_{as}^*(f) = \sum_{m=0}^{M-1} e^{-j \cdot 2\pi f(\tau_m + \Delta L_m)} [1 - i_m/I + (i_m/I) e^{-j \cdot 2\pi f \Delta}]. \quad (4.4.7)$$

КЧХ линейного интерполяционного фильтра

$$\dot{H}_{и.ф}^*(f) = 1 - \epsilon_m + \epsilon_m e^{-j \cdot 2\pi f \Delta}. \quad (4.4.8)$$

Рассмотрим теперь методику учета эффектов квантования входной информации по уровню в АЦП цифрового УФХН. Шум квантования определяется всем входным процессом, т. е. как его сигнальной, так и шумовой составляющими. В связи с этим найдем зависимость мощности выходного эффекта УФХН $u(n\Delta) = \sum_m u_m(n\Delta)$ в функции углов α и α_s ,

полагая, что на вход АР воздействует стохастический плосковолновой сигнал и некоррелированный по элементам АР шум, спектральные плотности которых на элементе $g_s(f)$ и $g_n(f)$; решетка линейная с M элементами. Будем рассматривать сразу оба способа цифрового формирования, учитывая интервал Δ дискретизации выходной величины $u(n\Delta)$ (для первого способа формирования такое рассмотрение дает оценку сверху). Зависимость мощности выхода цифрового УФХН от углов α и α_s определяется выражением

$$P_u(\alpha, \alpha_s) = \Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} \{g_s^*(f) M^2 \dot{R}_{as}^*(f) + M[g_n^*(f) + g_e^*(f)]\} df, \quad (4.4.9)$$

которое следует из формулы (1.1.13) при $\nu = 0$. Здесь $\dot{R}_{as}^*(f)$ — ХН цифрового УФХН, определяемая формулами (4.4.3) или (4.4.6); $g_s^*(f)$ и $g_n^*(f)$ — спектральные плотности дискретизированных сигнала и шума; $g_e^*(f)$ — спектральная плотность шума квантования, определяемая в соответствии с выражением (4.3.17):

$$g_e^* = (\sigma_s^2 + \sigma_n^2) 3 \cdot 2^{-2(m \text{ АЦП} + 1)} \approx \sigma_n^2 \cdot 3 \cdot 2^{-2(m \text{ АЦП} + 1)}, \quad (4.4.10)$$

где полагаем, что $\sigma_s^2/\sigma_n^2 = q^2 \ll 1$. Принимаем $\Delta = 1/2f_B$, где f_B — верхняя граничная частота входных процессов, а поэтому в полосе частот $|f| \leq \leq 1/2\Delta$ спектры $g_s^*(f) = g_s(f)/\Delta$ и $g_n^*(f) = g_n(f)/\Delta$. Тогда формула (4.4.9) принимает вид

$$P_u(\alpha, \alpha_s) = 2 \int_{f_H}^{f_B} \left\{ g_s(f) M^2 \dot{R}_{as}^*(f) + M [g_n(f) + \sigma_n^2 \cdot 3 \cdot 2^{-2(m \text{ АЦП} + 1)} \Delta] \right\} df. \quad (4.4.11)$$

Для более ясного изложения существа рассматриваемого вопроса примем, что спектры $g_s(f)$ и $g_n(f)$ отличны от нуля и постоянны в полосе (f_H, f_B) , а их уровни соответственно равны $\sigma_s^2/2(f_B - f_H)$ и $\sigma_n^2/2(f_B - f_H)$. В таком случае из (4.4.11) получаем

$$P_u(\alpha, \alpha_s) = \frac{\sigma_s^2 M^2}{f_B - f_H} \int_{f_H}^{f_B} \dot{R}_{as}^*(f) df + M \sigma_n^2 [1 + 2(f_B - f_H) \Delta \cdot 3 \cdot 2^{-2(m \text{ АЦП} + 1)}].$$

Полагая, что $f_H \ll f_B$ и $2(f_B - f_H) \approx 2f_B$, а также учитывая равенство $\Delta = 1/2f_B$, окончательно находим

$$P_u(\alpha, \alpha_s) = \frac{\sigma_s^2 M^2}{f_B - f_H} \int_{f_H}^{f_B} \dot{R}_{as}^*(f) df + M \sigma_n^2 [1 + 3 \cdot 2^{-2(m \text{ АЦП} + 1)}]. \quad (4.4.12)$$

В качестве нормирующего множителя примем величину $P_u(\alpha_s, \alpha_s)$, когда $\alpha = \alpha_s$ и $\dot{R}_{as}^*(f) = 1$, так что

$$\frac{P_u(\alpha, \alpha_s)}{P_u(\alpha_s, \alpha_s)} = \frac{\frac{\sigma_s^2 M^2}{f_B - f_H} \int_{f_H}^{f_B} \dot{R}_{as}^*(f) df + 1 + 3 \cdot 2^{-2(m \text{ АЦП} + 1)}}{q^2 M + 1 + 3 \cdot 2^{-2(m \text{ АЦП} + 1)}}, \quad (4.4.13)$$

где $q^2 = \sigma_s^2/\sigma_n^2$. Чтобы учесть лишь эффект квантования информации по уровню в АЦП можно принять, что задержки реализуются точно, для чего достаточно ХН цифрового устройства $\dot{R}_{as}^*(f)$ заменить на точную ХН $R_{as}(f)$ данной АР. Если к тому же полоса частот (f_H, f_B) не очень широкая, то в первом приближении можно ограничиться учетом средней частоты $f_{ср}$. Тогда выражение (4.4.13) примет вид

$$\frac{P_u(\alpha, \alpha_s)}{P_u(\alpha_s, \alpha_s)} = \frac{q^2 M R_{\alpha_s}^2 (f_{cp}) + 1 + 3 \cdot 2^{-2(m_{\text{АЦП}} + 1)}}{q^2 M + 1 + 3 \cdot 2^{-2(m_{\text{АЦП}} + 1)}}$$

Полученные формулы дают возможность проанализировать влияние разрядности АЦП $m_{\text{АЦП}}$ на качество ХН цифрового УФХН.

Рассмотрим теперь, как ХН, формируемая в частотной области (разд. 2.1) зависит от длительности интервала T_0 , на котором осуществляется вычисление Фурье-изображений входных реализаций $y_m(t) = x(t - \tau_m)$. Положим, что оно выполняется с помощью алгоритма БПФ [см. (4.2.15)] по N точкам ($T_0 = N\Delta$). Тогда изображение последовательности $y_m(n\Delta)$ для частоты $f_k = k/T_0$ есть

$$\begin{aligned} \dot{Y}_m^*(k, N) &= \sum_{n=0}^{N-1} y_m(n\Delta) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta - \tau_m) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \end{aligned}$$

а сам алгоритм работы УФХН описывается формулой

$$\dot{U}^*(k, N) = \sum_{m=0}^{M-1} e^{j \cdot 2\pi \frac{k}{T_0} \theta_m} \dot{Y}_m^*(k, N),$$

где $\dot{U}^*(k, N)$ — изображение выхода пространственного канала, сформированного на частоте $f_k = k/T_0$. Математическое ожидание $M\{|\dot{U}^*(k, N)|^2\}$, нормированное к M^2N , есть ХН по мощности $|\dot{R}^*(k, N)|^2$. Положим, что спектр $g_x(f)$ непрерывного сигнала $x(t)$ ограничен частотой f_B , а $\Delta \leq 1/2f_B$, и воспользуемся выражением для корреляционного момента (см. разд. 2.1) $M\{\dot{Y}_m^*(f_k) \dot{Y}_n^*(f_q)\}$ при $f_q = f_k$ [см. также (1.4.4)]. В результате получим

$$\begin{aligned} |\dot{R}^*(k, N)|^2 &= \frac{1}{M^2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{M-1} e^{j \cdot 2\pi \frac{k}{T_0} (\theta_m - \theta_r)} \times \\ &\int_{-f_B}^{f_B} g_x(\lambda) e^{j \cdot 2\pi (\tau_r - \tau_m) \lambda} N \left[\frac{\sin \pi T_0 (k/T_0 - \lambda)}{N \sin \pi \Delta (k/T_0 - \lambda)} \right]^2 d\lambda, \end{aligned}$$

что в случае эквидистантной АР дает

$$\begin{aligned} |\dot{R}^*(k, N)|^2 &= \int_{-f_B}^{f_B} g_x(\lambda) \left[\frac{\sin \pi T_0 (k/T_0 - \lambda)}{N \sin \pi \Delta (k/T_0 - \lambda)} \right]^2 \times \\ &\times \left[\frac{\sin \pi M (d/c) [(k/T_0) \sin \alpha_s - \lambda \sin \alpha]}{M \sin \pi (d/c) [(k/T_0) \sin \alpha_s - \lambda \sin \alpha]} \right]^2 d\lambda. \end{aligned}$$

Искажение ХН обусловлено здесь двумя факторами: дискретизацией входных реализаций $y_m(t)$ с шагом Δ и конечным числом отсчетов N , т. е. конечностью интервала $T_0 = N\Delta$. Задав конкретные величины для N и Δ , по этим формулам можно рассчитать ХН для частоты $f_k = k/T_0$.

Интересно проиллюстрировать переход к идеальной ХН. Исключим вначале первый фактор. Для этого умножим обе части предпоследнего равенства на Δ и положим, что $\Delta \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, но $N\Delta = T_0$. Заменяя $f_k = k/T_0$ на f , отсюда получаем

$$\begin{aligned} |R(f, T_0)|^2 &= \frac{1}{M^2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{M-1} e^{j \cdot 2\pi f (\theta_m - \theta_r)} \times \\ &\int_{-f_B}^{f_B} g_x(\lambda) e^{j \cdot 2\pi (\tau_r - \tau_m) \lambda} T_0 \left[\frac{\sin \pi T_0 (f - \lambda)}{\pi T_0 (f - \lambda)} \right]^2 d\lambda. \end{aligned}$$

Это выражение определяет ХН, сформированную на частоте f путем использования Фурье-изображений $Y_m(f, T_0)$ непрерывных реализаций $y_m(t)$, заданных на конечном интервале $(0, T_0)$. Если теперь принять $T_0 \rightarrow \infty$ и учесть, что при этом

$$T_0 \left[\frac{\sin \pi T_0 (f - \lambda)}{\pi T_0 (f - \lambda)} \right]^2 \rightarrow \delta(f - \lambda),$$

то получим выражение для идеальной ХН

$$|R(f)|^2 = g_u(f) = g_x(f) \left| \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{j \cdot 2\pi f (\theta_m - \tau_m)} \right|^2,$$

где $g_u(f)$ — спектр выходного процесса сформированного пространственного канала.

В случае гармонического сигнала $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$, заданного на интервале $(0, T_0)$, выражение для ХН находится из предыдущей формулы, где нужно принять $g_x(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$. Тогда

$$R(f, T_0) = e^{j\pi(f_0 - f)T_0} \frac{\sin \pi(f_0 - f)T_0}{\pi(f_0 - f)T_0} \frac{1}{M} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{M-1} e^{i \cdot 2\pi(f\theta_m - f_0\tau_m)} + e^{-j\pi(f_0 + f)T_0} \frac{\sin \pi(f_0 + f)T_0}{\pi(f_0 + f)T_0} \frac{1}{M} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{M-1} e^{i \cdot 2\pi(f\theta_m + f_0\tau_m)},$$

Для данной величины интервала T_0 и частоты $f=f_0$ отсюда получаем оценку амплитудной ХН, которая в случае эквидистантной АР имеет вид

$$|R(f_0, T_0)| \leq \left| \frac{\sin \left[\pi M f_0 \left(\frac{d}{c} \right) (\sin \alpha_s - \sin \alpha) \right]}{M \sin \left[\pi f_0 \left(\frac{d}{c} \right) (\sin \alpha_s - \sin \alpha) \right]} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\pi f_0 T_0} \left| \frac{\sin \left[\pi M f_0 \left(\frac{d}{c} \right) (\sin \alpha_s + \sin \alpha) \right]}{M \sin \left[\pi f_0 \left(\frac{d}{c} \right) (\sin \alpha_s + \sin \alpha) \right]} \right|,$$

где истинная ХН определяется первым слагаемым, а второе отвечает симметрично сформированной ХН, взятой с весом $1/2\pi f_0 T_0$. Для угла $\alpha = -\alpha_s$ оценка возрастания уровня бокового поля близка к $1/2\pi f_0 T_0$.

Что касается качества ХН, формируемой в частотно-волновой области, то, как следует из разд. 2.6, использование при пространственном преобразовании Фурье дискретной выборки на конечном числе элементов АР приводит точно к той же ХН, что и в частотной области [см. (2.6.12)]. Это и понятно, так как идеальная ХН АР учитывает как конечные геометрические размеры, так и дискретность самой решетки. Поэтому при оценке качества ХН, формируемой в частотно-волновой области, необходимо учитывать лишь эффект конечности интервала T_0 при переходе $t \rightarrow f$.

Модель цифрового многомерного фильтра. Примем такую помехосигнальную ситуацию, когда имеются плосковолновые сигнал и локальная помеха и изотропный шум. Подставим в КЧХ [см. (3.1.7)] выражение для обратной матрицы $N^{-1}(f)$ (воспользовавшись, например, формулой (2.3.5)), а также положим, что шум по элементам АР не коррелирован, т. е. $N_0(f) = E$. Тогда

$$W(f) = \frac{g_s(f)}{g_n(f)} \left[\bar{L}_s(f) - \frac{g_p(f)}{g_n(f) + M g_p(f)} L_p^T(f) \bar{L}_s(f) \bar{L}_p(f) \right]. \quad (4.4.14)$$

Для упрощения дальнейшего анализа свойств многомерного фильтра положим, что сигнал приходит по нормали к антенне, $\alpha_s = \delta_s = 0$, а поэтому

вектор $L_s(f) = I$, где I – вектор, состоящий из Мединиц. В таком случае m -я составляющая векторной КЧХ многомерного фильтра, обрабатывающего информацию с выхода m -го элемента АР,

$$W_m(f) = \frac{g_s(f)}{g_n(f)} \left[1 - \frac{g_p(f)}{g_n(f) + M g_p(f)} \sum_{i=0}^{M-1} e^{-i \cdot 2\pi f(t-m)\delta_p} \right], \quad (4.4.15)$$

где $\delta_p = (d/c) \sin \alpha_p$ – единичная задержка волнового фронта помехи. Определим далее m -ю составляющую векторной ИХ многомерного фильтра, которая является обратным Фурье-преобразованием [см. (4.4.15)]. В результате находим

$$w_m(t) = \psi(t) - \sum_{i=0}^{M-1} \lambda [t - (i-m)\delta_p]; \quad (4.4.16)$$

где

$$\psi(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{g_s(f)}{g_n(f)} \right\}; \quad \lambda(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{g_s(f)}{g_n(f)} \frac{g_p(f)}{g_n(f) + M g_p(f)} \right\}.$$

Зависимость (4.4.16) позволяет определить ИХ составляющих многомерного фильтра. Положим, что спектры $g_s(f)$, $g_n(f)$ и $g_p(f)$ постоянны и отличны от нуля лишь в конечной полосе частот $f_n \leq |f| \leq f_B$. Примем также в качестве мощностей этих процессов величины σ_s^2 , σ_n^2 и σ_p^2 , положив $\sigma_n^2 = 1$. Будем считать, что отношение $c/\lambda \sigma_s^2/\sigma_n^2 \ll 1$, причем мощность самого сигнала σ_s^2 можно не задавать, так как цель дальнейшего рассмотрения – получение оценки относительной потери помехоустойчивости цифровой СПВО по сравнению с оптимальной СПВО, определяемой отношением их индикаторных отношений c/λ . Для указанных спектров выражение (4.4.16) принимает вид

$$w_m(t) = \beta(t) - \mu \sum_{i=0}^{M-1} \beta [t - (i-m)\delta_p], \quad (4.4.17)$$

где

$$\beta(t) = \frac{\sin \pi(f_B - f_n)t}{\pi(f_B - f_n)t} \cos \pi(f_B + f_n)t;$$

$$\mu = \frac{q_{pn}^2}{1 + M q_{pn}^2}; \quad q_{pn}^2 = \sigma_p^2 / \sigma_n^2.$$

Функция $\beta(t)$ нормирована так, что $\beta(0) = 1$; при $q_{pn}^2 \gg 1$ величина $\mu \approx 1/M$. Примерный вид функции $w_m(t)$ показан на рис. 4.10. Она зависит от частотных (временных) свойств сигнала, шума и помехи [$g_s(f)$, $g_n(f)$, и $g_p(f)$], пространственных характеристик полей сигнала, шума и помехи (в частности, от углов α_s и α_p), параметров АР (величин

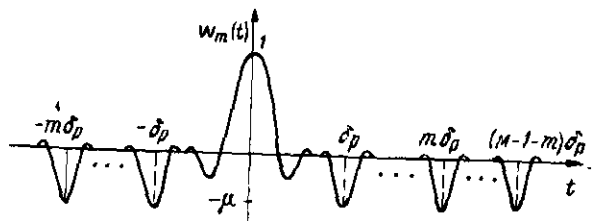


Рис. 4.10

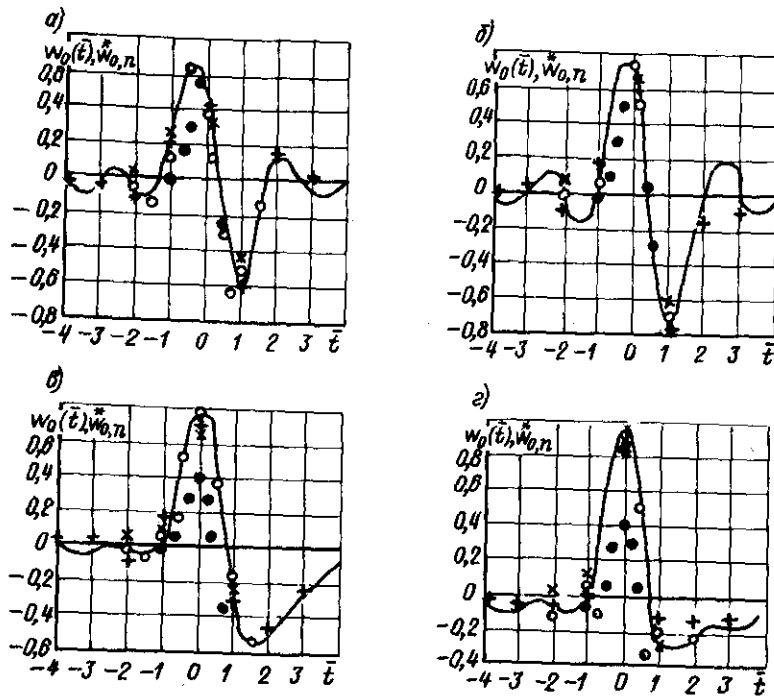


Рис. 4.11

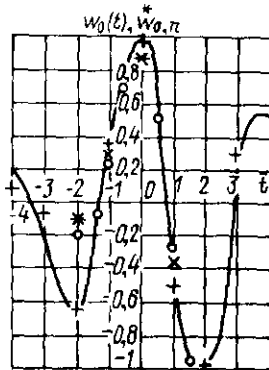


Рис. 4.12

d и M). Анализ функции $w_m(t)$ дает возможность выявить зависимость ее свойств от интересующих величин.

Рассмотрим конкретную систему с полосой частот (f_H, f_B) , где $f_B = kf_H$, расстояние между элементами АР $d = c/2f_B = c/2kf_H$. Далее удобно перейти к безразмерному времени $\bar{t} = t/\theta$, где $\theta = 1/2f_B = 1/2kf_H$, а задержка $\delta_p = (d/c) \sin \alpha_p = (1/2kf_H) \sin \alpha_p$, выраженная в единицах безразмерного времени \bar{t} , равна $\sin \alpha_p$. В результате перехода от t к \bar{t} формула (4.4.17) принимает вид

$$w_m(\bar{t}) = \beta(\bar{t}) - \mu \sum_{i=0}^{M-1} \beta[\bar{t} - (i-m) \sin \alpha_p], \quad (4.4.18)$$

где

$$\beta(\bar{t}) = \frac{\sin \{ \pi [(k-1)/2k] \bar{t} \}}{\pi [(k-1)/2k] \bar{t}} \cos \{ \pi [(k+1)/2k] \bar{t} \}.$$

Рассмотрим систему с числом элементов АР $M=6$ и полосой частот $(f_H, 8f_H)$, т. е. $k=8$; отношение $q_{pn}^2=100$. В качестве угловой единицы примем величину ХН на уровне 0,707, что для средней частоты $4,5f_H$ отвечает значению $\alpha_{0,7} \approx 36^\circ$. На рис. 4.11 показаны результаты расчета ИХ многомерного фильтра $w_m(t)$ для его составляющей $m=0$, выполненного с помощью формулы (4.4.18) для четырех величин углов: $\alpha_p = 0,25\alpha_{0,7} - (a)$; $\alpha_p = 0,5\alpha_{0,7} - (б)$; $\alpha_p = \alpha_{0,7} - (в)$; $\alpha_p = 2,5\alpha_{0,7} - (г)$. Выражение (4.4.18) позволяет выполнить простейший анализ ИХ $w_m(t)$. Так, если угол α_p мал, то функцию, входящую в (4.4.18) под знак суммы, можно разложить в ряд Тейлора в точке \bar{t} относительно величины $(i-m) \sin \alpha_p$:

$$w_m(\bar{t}) \approx \sin \alpha_p \left(\frac{M-1}{2} - m \right) \beta'(\bar{t}), \quad (4.4.19)$$

т. е. ИХ пропорциональна производной $\beta'(\bar{t})$ функции $\beta(\bar{t})$, что согласуется, в принципе, с графиком (см. рис. 4.11, а). Если угол α_p велик, то функция $w_m(t)$ приближается к $\beta(\bar{t})$, так как вклад суммы в формуле (4.4.18) в этом случае мал (см. рис. 4.11, г).

На рис. 4.12 показаны результаты расчета ИХ $w_0(\bar{t})$ [см. (4.4.18)] для более узкополосного процесса $(f_H, 2f_H)$, т. е. $k=2$. Здесь $\alpha_{0,7} \approx 27^\circ$. Видно, что функция $w_0(\bar{t})$ имеет более колебательный характер, чем выше. При расчете ИХ в этом случае в качестве единицы времени удобно взять величину $1/4f_{cp} = 1/2(k+1)f_H$, что для узкополосного процесса соответствует четверти периода его несущей. В результате в формуле (4.4.18) нужно заменить $(k-1)/2k$ на $(k-1)/2(k+1)$, а $\sin \alpha_p$ на $\sin \alpha_p [(k+1)/k]$.

Приведенные результаты расчета ИХ многомерного фильтра отвечают оптимальной СПВО. Определим теперь для этой же системы характеристики многомерного цифрового нерекурсивного фильтра, реализующего адаптивный алгоритм вычисления весовых коэффициентов. Если входные

процессы ограничены некоторой конечной частотой f_b и частота дискретизации $f_d \geq 2f_b$, то, как это уже неоднократно отмечалось, в полосе частот $|f| \leq f_b$ спектры непрерывных и дискретных процессов отличаются лишь постоянным множителем, равным f_d , а поэтому безразлично, для какого вида процессов выполняются расчеты. В соответствии с методикой, изложенной в разд. 2.5, для оценки помехоустойчивости дискретной системы необходимо вначале зафиксировать основные параметры системы: величину единичной задержки Δ и число весовых коэффициентов N (порядок фильтра). После этого необходимо найти весовые коэффициенты, реализуемые принятым адаптивным алгоритмом. В рассматриваемом примере эти коэффициенты определялись по формуле (3.1.34), минимизирующей ошибки оценки сигнала (решение уравнения Винера), т. е. в адаптивном варианте — реализация вычисления весовых коэффициентов с помощью алгоритмов Уидроу [см. (3.1.48)] или Гриффитса [см. (3.1.66)]. Как следует из формулы (3.1.34), для вычисления оптимального весового вектора W_0 необходимо задать матрицу корреляций входных процессов R_{xx} и вектор R_{xs} . Так как принято, что $\sigma_s^2/\sigma_n^2 \ll 1$ [см. (3.1.7)], то матрица R_{xx} определяется практически шумом и помехой, где в соответствии с формулами (3.1.27) и (3.1.28) для вычисления элементов этой матрицы можно воспользоваться выражением $\beta(t)$ [см. (4.4.18)] — нормированной корреляционной функцией этих процессов, а также отношением $q_{pn}^2 = \sigma_p^2/\sigma_n^2$. Составляющие вектора R_{xs} , определяемые формулой (3.1.32), также могут быть вычислены с помощью выражения для $\beta(t)$ [см. (4.4.18)], так как форма спектров всех трех процессов принята одна и та же. Помехоустойчивость цифровой адаптивной СПВО определяется выходным отношением $c/\text{ш } \hat{Q}$ [см. (2.5.24)]. Для использования этой формулы необходимо предварительно найти вектор весовых коэффициентов W_0 [см. (3.1.34)], сформировав для этого матрицу R_{xx} и вектор R_{xs} , как это было описано выше. Так как в рассматриваемом примере $M=6$, а величина N достигает 8, то это означает, что матрица R_{xx} имеет 48×48 элементов, а векторы R_{xs} и W_0 имеют по 48 составляющих. Помехоустойчивость оптимальной СПВО определяется выходным отношением $c/\text{ш } Q$ [см. (2.3.15)]; относительную потерю помехоустойчивости цифровой системы определим величиной $\pi = 1 - \hat{Q}/Q$.

В табл. 4.1 приведены результаты расчетов величины π в процентах для системы с соотношением границ полосы частот $f_b = 8f_n$ ($k=8$), нескольких значений порядка нерекурсивного фильтра N и единичной задержки Δ (выраженной в долях величины $\theta = 1/2f_b = 1/2kf_n$) и четырех значений угла прихода локальной помехи a_p (выраженных в долях ширины ХН $a_{0,7} = 36^\circ$). Из этой таблицы видно, что при фиксированной величине задержки Δ и увеличении числа отводов N потери уменьшаются. Напомним, что произведение $N\Delta = T_0$ определяет длительность ИХ (см. разд. 2.5). При одной и той же величине $N\Delta = T_0$ потери тем меньше, чем меньше Δ и больше N . Интересно сравнить между собой ИХ многомерного непрерывного $w_m(t)$ и дискретного фильтров. Ординаты последней определяются весовыми коэффициентами w_{mn} , где $n =$

Таблица 4.2 Потери помехоустойчивости π , %

N	Δ	a_p	
		$a_{0,7}$	$2a_{0,7}$
4	$\theta/2$	5	8
8	$\theta/2$	0,2	3
2	θ	17	20
4	θ	0,3	3,5
8	θ	0,2	3

Таблица 4.1 Потери помехоустойчивости π , %

N	Δ	a_p			
		$0,25 a_{0,7}$	$0,5 a_{0,7}$	$a_{0,7}$	$2,5 a_{0,7}$
8	$\theta/4$	0,2	1	3	5
4	$\theta/2$	2	2	6	10
8	$\theta/2$	0,3	0,5	1	2
4	θ	25	0,5	3	6
8	θ	6	0,3	1,5	3

$= -N/2, \dots, 0, \dots, N/2 - 1$. Относительная величина единичной задержки $(\Delta/\theta)^{-1} = \nu$ равна величинам 4, 2 или 1. Коэффициенты w_{mn} для $m=0$ и четырех сочетаний параметров N и ν : $N=8$ и $\nu=4$; $N=8$ и $\nu=2$; $N=4$ и $\nu=1$; $N=8$ и $\nu=1$ показаны на рис. 4.11 (соответственно знаки: „•“, „•“, „•“, „•“, „•“, „•“, „•“, „•“). Из этих рисунков видно, что для малых величин потерь помехоустойчивости ординаты дискретного фильтра (весовые коэффициенты w_{0n}) достаточно хорошо согласуются с графиком ИХ $w_0(t)$, т. е. величины w_{0n} являются фактически ординатами функции $w_0(t)$ при $t=n$. Таким образом, имеется очевидная связь (см. разд. 2.5 и 3.1) между ИХ непрерывного и дискретного фильтров оптимальной и субоптимальной СПВО.

В табл. 4.2 приведены результаты расчетов величины потери помехоустойчивости π для второго варианта частотной полосы, когда $f_b = 2f_n$ ($k=2$). Варьируемые величины — N , Δ и a_p . Здесь единица измерения времени $\theta = 1/4f_{cp} = 1/2(k+1)f_n$, как это было определено выше для этого варианта системы. Видно, что для такого относительно узкополосного процесса уже при $N=4$ и $\Delta=\theta$ потери помехоустойчивости малы (заметим, что задержка $\theta = 1/4f_{cp} = 1/6f_n$ обеспечивает для узкополосного процесса его составляющую, близкую к гильбертову преобразованию самого процесса). Характер зависимости величины π от варьируемых параметров здесь тот же, что и выше (см. табл. 4.1). На рис. 4.12 показаны значения весовых коэффициентов w_{0n} для $m=0$ и трех сочетаний параметров N и ν : $N=8$ и $\nu=2$; $N=4$ и $\nu=1$; $N=8$ и $\nu=1$ (обозначения те же, что и на рис. 4.11). Видно достаточно хорошее соответствие между значениями функции $w_0(t)$ и дискретными значениями w_{0n} .

Аналогичным образом могут быть определены ИХ составляющих многомерного фильтра с КЧХ [см. (3.2.4)], отвечающей алгоритму минимизации выходной мощности с учетом линейного ограничения. Для того же случая, что и выше — локальная помеха, малая величина входного отношения $c/\text{ш } g_s(f) \ll g_n(f)$ — из формулы (3.2.4) находим:

$$\Phi(t) = \frac{b(f)}{M[1 - \gamma(f)R_{ps}^2(f)]} \left[\bar{L}_s(f) - \frac{\gamma(f)}{M} L_p^T(f) \bar{L}_s(f) \bar{L}_p(f) \right], \quad (4.4.20)$$

где величины $\gamma(f)$ и $R_{ps}(f)$ определяются формулой (2.3.16). Если $\alpha_s = \delta_s = 0$, то для m -й составляющей $\Phi(f)$ имеем

$$\Phi_m(f) = \frac{b(f)}{M[1 - \gamma(f)R_{ps}^2(f)]} \left[1 - \frac{\gamma(f)}{M} \sum_{i=0}^{M-1} e^{-j \cdot 2\pi f(i-m)\delta_p} \right], \quad (4.4.21)$$

т. е. выражение, по структуре аналогичное (4.4.15). Отсюда получаем формулу для m -й составляющей векторной ИХ многомерного фильтра

$$\varphi_m(t) = \rho(t) - \sum_{i=0}^{M-1} \eta[t - (i-m)\delta_p], \quad (4.4.22)$$

где

$$\rho(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{b(f)}{M[1 - \gamma(f)R_{ps}^2(f)]} \right\};$$

$$\eta(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{b(f)\gamma(f)}{M^2[1 - \gamma(f)R_{ps}^2(f)]} \right\},$$

Это выражение позволяет определить ИХ составляющих многомерного фильтра в рассматриваемом случае. Вычисления существенно упрощаются, когда $g_p(f) \gg g_n(f)$ и $\gamma(f) \approx 1$.

На рассмотренном выше примере были продемонстрированы два способа определения ординат ИХ дискретного многомерного фильтра: путем взятия дискретных значений функции $w_m(t)$ и определения весовых коэффициентов \dot{w}_{mn} . Рассмотрим способ определения ординат ИХ дискретного многомерного фильтра, основанный на наилучшем приближении его КЧХ к КЧХ оптимального фильтра, являющейся желаемой. Такие характеристики $W_m(f)$ [см. (4.4.15)] и $\Phi_m(f)$ [см. (4.4.21)] для m -х составляющих двух видов адаптивных фильтров приведены выше.

Рассмотрим КЧХ $W_m(f)$. Положим, что спектры входных процессов ограничены частотой f_b . Это означает, что также ограничена КЧХ $W_m(f)$, а следовательно, и ее вещественная и мнимая части $\text{Re } W_m(f)$ и $\text{Im } W_m(f)$, как это показано на рис. 4.13, где эти функции в общем случае заданы в более широкой полосе $|f| \leq 1/2\Delta$, а на интервале $f_b \leq |f| \leq 1/2\Delta$ дополнены нулевыми значениями (Δ — интервал дискретизации). Так как функции $\text{Re } W_m(f)$ и $\text{Im } W_m(f)$ можно периодически продолжить, приняв в качестве периода величину $1/\Delta$, то наилучшим способом достижения минимума интегральной среднеквадратической ошибки приближения вещественной и мнимой частей КЧХ дискретного фильтра $\dot{W}_m(f)$, т. е. функций $\text{Re } \dot{W}_m(f)$ и $\text{Im } \dot{W}_m(f)$ соответственно к $\text{Re } W_m(f)$ и $\text{Im } W_m(f)$, является представление $\text{Re } W_m(f)$ и $\text{Im } W_m(f)$ с помощью конечных сумм ряда Фурье

$$\text{Re } \dot{W}_m(f) = a_{m0}/2 + \sum_{n=1}^{N/2} a_{mn} \cos 2\pi f \Delta n,$$

$$\text{Im } \dot{W}_m(f) = \sum_{n=1}^{N/2} b_{mn} \sin 2\pi f \Delta n,$$

где

$$a_{mn} = 2\Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} \text{Re } W_m(f) \cos 2\pi f \Delta n df;$$

$$b_{mn} = 2\Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} \text{Im } W_m(f) \sin 2\pi f \Delta n df.$$

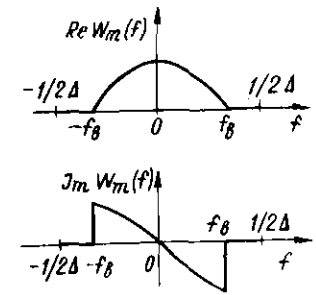


Рис. 4.13

Следовательно, приближаемая КЧХ

$$\dot{W}_m(f) = a_{m0}/2 + \sum_{n=1}^{N/2} a_{mn} \cos 2\pi f \Delta n + j \sum_{n=1}^{N/2} b_{mn} \sin 2\pi f \Delta n = \sum_{n=-N/2}^{N/2} w_{mn} e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n}, \quad (4.4.23)$$

где

$$w_{mn} = \frac{a_{mn} - jb_{mn}}{2} = \Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} W_m(f) e^{j \cdot 2\pi f \Delta n} df = \Delta \int_{-1/2\Delta}^{1/2\Delta} A_m(f) \cos [\Phi_m(f) + 2\pi f \Delta n] df, \quad (4.4.24)$$

а функции $A_m(f) = |W_m(f)|$, $\Phi_m(f) = \arg W_m(f)$ есть АЧХ и ФЧХ желаемого фильтра. Из сравнения формул (4.4.23) и (2.5.18) видно, что они фактически совпадают (полное совпадение обеспечивается сдвигом любой из переменных суммирования n). Таким образом, коэффициенты ряда Фурье w_{mn} могут быть использованы для представления КЧХ $\dot{W}_m(f)$ дискретного фильтра, что обеспечивает в таком случае наилучшее приближение ее к желаемой КЧХ $W_m(f)$ в классе тригонометрических полиномов с заданным числом членов.

На практике коэффициенты w_{mn} определяются путем численного интегрирования. Так, в результате разбивки интервала $(-1/2\Delta, 1/2\Delta)$ на L частей (L — четное число, $L > N$) с шагом $1/L\Delta$, задания функций $A_m(f)$ и $\Phi_m(f)$ в $L+1$ точках $f = k/L\Delta$, и применения метода трапеций получаем

$$w_{mn} \approx \frac{1}{L} \left\{ A_m(0) + A_m(1/2\Delta) \cos \pi n + 2 \sum_{k=1}^{L/2-1} A_m \left(\frac{k}{L\Delta} \right) \cos \left[\Phi_m \left(\frac{k}{L\Delta} \right) + \frac{2\pi}{L} nk \right] \right\}. \quad (4.4.25)$$

Для определения искомой КЧХ $\dot{W}_m^*(f)$ нужно вычислить N коэффициентов w_{mn} при $n = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2 - 1$ (так как коэффициенты w_{mn} при $n = N/2$ и $n = -N/2$ совпадают), так что

$$\dot{W}_m^*(f) = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} w_{mn} e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n} + 2w_{m, N/2} \cos \pi f \Delta N. \quad (4.4.26)$$

Таким образом, для $m=0, 1, \dots, M-1$ могут быть определены все составляющие векторной КЧХ многомерного фильтра. При вычислении весовых коэффициентов w_{mn} фактически нужно задать $L/2 + 1$ значений АЧХ $A_m(k/\Delta L)$ при $k=0, 1, \dots, L/2$ и $L/2 - 1$ значений ФЧХ $\Phi_m(k/\Delta L)$ при $k=1, 2, \dots, L/2 - 1$, так как при $k=0$ и $k=L/2$ всегда $\Phi_m(0) = \Phi_m(L/2) = 0$, т. е. всего задать L величин $A_m(f)$ и $\Phi_m(f)$, позволяющих определить N коэффициентов w_{mn} ($N < L$). Заметим, что зависимости (4.4.25) отвечает минимальная суммарная квадратическая ошибка приближения характеристик $\text{Re } \dot{W}_m^*(f)$ и $\text{Im } \dot{W}_m^*(f)$ соответственно к $\text{Re } W_m(f)$ и $\text{Im } W_m(f)$, когда последние заданы на дискретном множестве $L/2 + 1$ точек, взятых с шагом $1/\Delta L$ (число их не нулевых значений равно всего L). Выражение (4.4.25) представляет собой фактически формулу Бесселя, где приближаемая рядом Фурье функция (4.4.23) имеет аргументом частоту, а номера n коэффициентов ряда (4.4.24) отвечают дискретному времени.

Выше было принято, что число L задаваемых значений АЧХ и ФЧХ больше числа N определяемых весовых коэффициентов. Если $N=L$, то весовые коэффициенты w_{mn} могут быть определены из условия интерполяции функции $\dot{W}_m^*(f)$ в точках $f=k/\Delta L$, т. е. $\dot{W}_m^*(k/L \Delta) = W_m(k/L \Delta)$. В таком случае, как известно, приближаемая функция $\dot{W}_m^*(f)$ выражается также интерполяционным тригонометрическим полиномом (ИТП). Его коэффициенты w_{mn} находятся по формуле (4.4.25), только коэффициент при $n=N/2=L/2$ берется с множителем, равным $1/2$. Следовательно, КЧХ $\dot{W}_m^*(f)$, представляющая собой ИТП, определяется формулой

$$\dot{W}_m^*(f) = \sum_{n=-L/2+1}^{L/2-1} w_{mn} e^{-j \cdot 2\pi f \Delta n} + w_{m, L/2} \cos \pi f \Delta L. \quad (4.4.27)$$

Таким образом, мы рассмотрели всего три способа определения весовых коэффициентов многомерного дискретного фильтра [21]: с помощью использования дискретных значений непрерывной ИХ $w_m(t)$ (см. разд. 2.5); путем непосредственного вычисления составляющих w_{mn} весового вектора (см. разд. 3.1 и 3.2) и, наконец, на основе наилучшего (интегрального или суммарного) квадратического приближения КЧХ $\dot{W}_m^*(f)$ к желаемой КЧХ $W_m(f)$. Во всех случаях фильтр синтезируется вначале как физически невозможная система, так что процедура фильтрации для m -й составляющей многомерного фильтра описывается соотношением

$$\dot{u}_m^*(l \Delta) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \dot{w}_{mn} x_m(l \Delta - n \Delta). \quad (4.4.28)$$

Переход к физически возможному фильтру осуществляется сдвигом ИХ \dot{w}_{mn} по n на $N/2 + 1$ дискрет вправо, а также задержкой входной последовательности $x_m(l \Delta)$ на $N/2 + 1$ тактов, т. е. заменой в формуле (4.4.28) n и l соответственно на $n - N/2 - 1$ и на $l - N/2 - 1$, что дает

$$\dot{u}_m^*[(l - N/2 - 1) \Delta] = \sum_{n=1}^N \dot{w}_{m, n - N/2 - 1} x_m(l \Delta - n \Delta). \quad (4.4.29)$$

Модели цифровых устройств послесуммарной части СПВО. К числу таких устройств (см. рис. 4.1) относятся — скалярный фильтр, квадратичный детектор и цифровой ФНЧ. Реализация скалярной части СПВО, так же как и многомерной, возможна как в частотной, так и во временной области [47]. Рассмотрим вначале кратко первый случай, воспользовавшись разд. 2.1. Послесуммарная фильтрация заключается в вычислении для каждого значения частоты f_k произведений $h(f_k)U(f_k)$, где $h(f)$ есть КЧХ [см. (2.1.38)] скалярного фильтра, а $U(f)$ — изображение процесса на выходе сумматора многомерного фильтра с КЧХ $H(f)$ [см. (2.1.39)], определенное на интервале времени $(t - T_0, t)$. Далее вычисляется энергия профильтрованного таким образом процесса $|h(f_k)U(f_k)|^2$, что соответствует операциям квадратического детектирования и предварительного накопления на интервале обработки T_0 . В случае адаптивной цифровой СПВО эта процедура полностью сохраняется, лишь КЧХ скалярного фильтра $v(f)$ определяется формулой (3.1.8) или (3.2.5) в зависимости от КЧХ многомерного фильтра $W(f)$ [см. (3.1.7)] или $\Phi(f)$ [см. (3.2.4)]. Положим, что интервал наблюдения T состоит из I интервалов T_0 , на которых вычисляются Фурье-изображения обрабатываемых реализаций (см. разд. 2.1), т. е. $T/T_0 = I$. Обозначим через $\dot{w}(iT_0)$ энергию профильтрованного процесса на i -м интервале обработки T_0 , т. е.

$$\dot{w}(iT_0) = \sum_k |v(f_k)U(f_k, iT_0)|^2. \quad (4.4.30)$$

Далее возможны два способа реализации цифрового ФНЧ. Первый — с помощью цифрового осреднителя, определяемого алгоритмом

$$\dot{z}^*(nT_0) = \frac{1}{I} \sum_{i=n-I}^{n-1} \dot{w}(iT_0) = \frac{1}{I} \sum_{m=0}^{I-1} \dot{w}[(n-I-m)T_0]. \quad (4.4.31)$$

АЧХ такого фильтра, как следует из формулы (4.4.31),

$$|\dot{K}^*(f)| = \frac{1}{I} \left| \frac{\sin \pi f T}{\sin \pi f T_0} \right|. \quad (4.4.32)$$

Второй способ реализации ФНЧ — с помощью рекурсивного фильтра [см. (4.2.25)] первого порядка, определяемого алгоритмом

$$\dot{z}^*(nT_0) = \dot{z}^*(nT_0 - T_0) + \frac{T_0}{T} [\dot{w}^*(nT_0 - T_0) - \dot{z}^*(nT_0 - T_0)]. \quad (4.4.33)$$

АЧХ такого фильтра, как следует из формулы (4.4.33),

$$|\dot{K}^*(f)| = \frac{T_0/T}{[1+(1-T_0/T)^2 - 2(1-T_0/T)\cos 2\pi fT_0]^{1/2}} \quad (4.4.34)$$

Таким образом, при реализации в частотной области существует две тактовых частоты обработки: частота $1/\Delta$ при вычислении Фурье-изображений $U(f_k)$ и частота $1/T_0$ — после выполнения частотной обработки. Если $T_0 \ll T$, то в области малых частот АЧХ [см. (4.4.32) и (4.4.34)] приближаются соответственно к АЧХ непрерывного осреднителя $|\sin \pi fT|/|\pi fT|$ и интегрирующей RC-цепочки $(1+4\pi^2 f^2 T^2)^{-1/2}$.

Рассмотрим теперь основные особенности системы обработки во временной области, схема которой показана на рис. 4.1 (см. также рис. 2.20). Алгоритм обработки в такой системе, записанный в компактном виде, определяется первым выражением (2.5.20). Проанализируем его с точки зрения особенностей цифровой обработки. Обозначим выход сумматора многомерного фильтра, как и выше, через $\dot{u}^*(n\Delta)$. Положим, что скалярный фильтр реализуется с помощью нерекурсивного фильтра (4.2.24), выход которого $\dot{y}^*(n\Delta)$ связан с его входом $\dot{u}^*(n\Delta)$ соотношением

$$\dot{y}^*(n\Delta) = \sum_{k=1}^{N'} \dot{v}_k \dot{u}^*(n\Delta - k\Delta), \quad (4.4.35)$$

где весовые коэффициенты фильтра — \dot{v}_k (способ их определения рассмотрен в разд. 2.5). Далее осуществляется квадратическое детектирование величины $\dot{y}^*(n\Delta)$, т. е. находится величина $\dot{q}^*(n\Delta) = \dot{y}^{*2}(n\Delta)$, где $\dot{q}^*(n\Delta)$ — выход детектора. Так же, как и в частотной области, возможны два способа реализации цифрового ФНЧ: с помощью осреднителя

$$\dot{z}^*(n\Delta) = \frac{1}{J} \sum_{i=n-J}^{n-1} \dot{q}^*(n\Delta) = \frac{1}{J} \sum_{m=0}^{J-1} \dot{q}^*[(n-J-m)\Delta], \quad (4.4.36)$$

где $J = T/\Delta$, или с помощью рекурсивного фильтра первого порядка

$$\dot{z}^*(n\Delta) = \dot{z}^*(n\Delta - \Delta) + \frac{\Delta}{T} [\dot{q}^*(n\Delta - \Delta) - \dot{z}^*(n\Delta - \Delta)], \quad (4.4.37)$$

АЧХ этих фильтров определяются соответственно формулами (4.4.32) и (4.4.34), где величину T нужно заменить на J , а T_0 на Δ . В случае решения задачи обнаружения детерминированного сигнала скалярная часть системы [см. (2.1.47)], представляет собой коррелятор и последующий осреднитель.

Помехоустойчивость цифровой адаптивной СПВО. В разд. 2.5 приведено выражение (2.5.21), определяющее выходное отношение с/ш адап-

тивной СПВО с многомерным фильтром, реализуемым на ЛЗ с отводами, полученное для случая непрерывных входных процессов. Сделаем то же самое для цифровой адаптивной СПВО, полагая, что входные процессы с помощью АЦП преобразуются в цифровые последовательности, а многомерный и скалярный фильтры реализуются во временной области как нерекурсивные цифровые фильтры. Задача заключается фактически в дополнительном учете влияния погрешностей АЦП и арифметических ошибок в цифровой адаптивной СПВО. Расчетная схема цифровой системы показана на рис. 4.14, где ϵ — погрешности АЦП; ξ_1^* и ξ_2^* — арифметические ошибки при многомерной и скалярной фильтрации; \dot{W}_m^* — КЧХ составляющих многомерного фильтра; $\dot{V}^*(f)$ — КЧХ скалярного фильтра; $\dot{K}^*(f)$ — КЧХ цифрового ФНЧ.

В соответствии с изложенным в разд. 2.1 для оценки помехоустойчивости цифровой системы нужно получить выражения для первого и второго моментов выходного эффекта \dot{z}^* . Разностному уравнению (4.4.37), описывающему процедуру фильтрации с помощью ФНЧ с АЧХ $|\dot{K}^*(f)|$ [см. (4.4.34)] (где T_0 нужно заменить на Δ), отвечает ИХ рекурсивного фильтра первого порядка

$$k(n\Delta) = \begin{cases} \Delta/T \exp(-n\Delta/T) & \text{при } n \geq 0; \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases} \quad (4.4.38)$$

Связь входа ФНЧ $\dot{p}^*(n\Delta)$ и его выхода $\dot{z}^*(n\Delta)$ определяется с помощью ИХ $k(n\Delta)$ дискретной сверткой

$$\dot{z}^*(n\Delta) = \sum_{i=0}^{J-1} k(i\Delta) \dot{p}^*(n\Delta - i\Delta), \quad (4.4.39)$$

где $J = T/\Delta$. Так как процессы принимаются стационарными, то

$$\begin{aligned} m_z^* &= M\{\dot{z}^*(n\Delta)\} = M\{\dot{p}^*(n\Delta)\} \sum_{i=0}^{J-1} k(i\Delta) = \\ &= \frac{\Delta}{T} \frac{1-e^{-1}}{1-e^{-\Delta/T}} \sigma_q^{*2}, \end{aligned} \quad (4.4.40)$$

где учтено, что $\dot{p}^* = \dot{q}^{*2}$ (поэтому $M\{\dot{p}^*(n\Delta)\} = \sigma_q^{*2}$), а также равенство $J\Delta = T$. Далее определяем

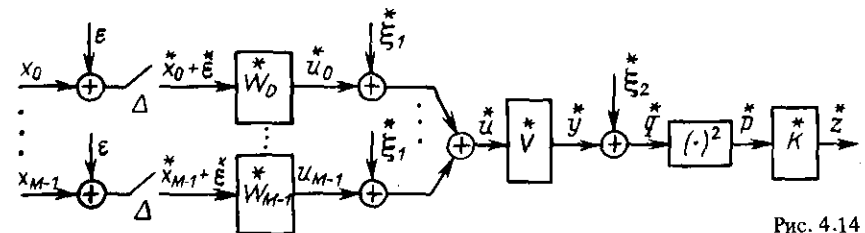


Рис. 4.14

$$\sigma_z^2 = M \{ [z^*(n\Delta) - m_z^*]^2 \} = \sum_{i=0}^{J-1} \sum_{m=0}^{J-1} k(i\Delta) k(m\Delta) \times$$

$$\times r_p^*(i\Delta - m\Delta) = \sum_{\nu=-J+1}^{J-1} \sum_{i=0}^{J-1-|\nu|} k(i\Delta) k(i\Delta + |\nu|\Delta) r_p^*(\nu\Delta) =$$

$$= \frac{\Delta^2}{T^2} \frac{1}{1 - e^{-2\Delta/T}} \sum_{\nu=-J+1}^{J-1} (e^{-(\Delta/T)|\nu|} - e^{-2} e^{(\Delta/T)|\nu|}) r_p^*(\nu\Delta),$$

где $r_p^*(\nu\Delta)$ – корреляционная функция последовательности $p^*(n\Delta)$ на входе ФНЧ. Так как соотношение интервала корреляции $\tau_{\text{кор}}$ последовательности на входе ФНЧ и его постоянной T таково, что $T \gg \tau_{\text{кор}}$, то можно считать, что ФНЧ является узкополосной системой по отношению ко входной последовательности $p^*(n\Delta)$. В таком случае можно принять, что $r_p^*(\nu\Delta) \approx g_p^*(0) \delta_0(\nu\Delta)$, где $\delta_0(\nu\Delta)$ – дискретная дельта-функция (1.1.19); $g_p^*(0)$ – спектральная плотность (при $f=0$), последовательности $p^*(n\Delta)$. В результате из последней формулы находим

$$\sigma_z^2 = \frac{\Delta^2}{T^2} \frac{1 - e^{-2}}{1 - e^{-2\Delta/T}} g_p^*(0). \quad (4.4.41)$$

Так как $\Delta \ll T$, то в формулах (4.4.40) и (4.4.41) можно принять, что $1 - e^{-\Delta/T} \approx \Delta/T$ и $1 - e^{-2\Delta/T} \approx 2\Delta/T$. Положим также, что спектры входных процессов ограничены частотой f_B , а $\Delta = 1/2f_B$. В таком случае дисперсия σ_q^2 и спектральная плотность $g_p^*(0)$, входящие в формулы (4.4.40) и (4.4.41), могут быть выражены через спектр $g_q^*(f)$ последовательности $q^*(n\Delta)$ на входе детектора, причем $g_q^*(f) = (1/\Delta) g_q(f)$, где $g_q(f)$ – спектр соответствующего непрерывного процесса $q(t)$. В таком случае из формул (1.1.13) и (4.2.8) следует, что

$$\sigma_q^2 = \int_{-f_B}^{f_B} g_q(f) df; \quad g_p^*(0) = (2/\Delta) \int_{-f_B}^{f_B} g_q^2(f) df, \quad (4.4.42)$$

где учтено, что для гауссовых процессов $r_p^*(\nu\Delta) = 2r_q^2(\nu\Delta)$. Тогда

$$m_z^* = (1 - e^{-1}) \int_{-f_B}^{f_B} g_q(f) df; \quad \sigma_z^2 = \frac{1 - e^{-2}}{T} \int_{-f_B}^{f_B} g_q^2(f) df. \quad (4.4.43)$$

Таким образом, интересующие нас моменты определяются спектральной плотностью последовательности $q^*(b\Delta)$ на входе детектора, равной

(с точностью до постоянной $1/\Delta$) спектральной плотности $g_q(f)$ соответствующего непрерывного процесса $q(t)$.

Для определения выходного отношения с/ш нужно найти приращение математического ожидания Δm_z^* выходного эффекта $z^*(n\Delta)$, обусловленное сигналом, и его дисперсию σ_z^2 , обусловленную шумом, причем в обеих ситуациях (H_0 и H_1) имеются погрешности и ошибки цифровой обработки. При оценке их влияния на величины Δm_z^* и σ_z^2 целесообразно исходить из следующих соображений. Полагая сигнал слабым, можно считать, что дисперсии погрешностей и ошибок цифровой обработки в ситуациях H_0 и H_1 практически совпадают (эти дисперсии, как следует из разд. 4.3, определяются дисперсиями обрабатываемых процессов). Если учесть к тому же, что математические ожидания этих погрешностей и ошибок, определенные на всей длительности обрабатываемой реализации, равны нулю, то есть основание считать, что на приращение математического ожидания Δm_z^* , обусловленное сигналом, указанные факторы цифровой обработки не влияют. Зато они влияют на величину дисперсии σ_z^2 , так как погрешности $\tilde{\epsilon}$ и ошибки $\tilde{\xi}_1$ и $\tilde{\xi}_2$ представляют собой аддитивные шумы (см. рис. 4.14), которые добавляются в соответствующих точках тракта. На основе изложенного будем обозначать спектральную плотность, входящую в первое выражение (4.4.43), через $g_{q,s}(f)$, а во второе – через $g_{q,n+\epsilon}(f)$. Запишем отношение Δm_z^* к σ_z^2 , учтя, что подынтегральные функции в (4.4.43) – четные:

$$\dot{Q} = \frac{\Delta m_z^*}{\sigma_z^2} = \frac{\sqrt{2}(1 - e^{-1}) \sqrt{T} \int_0^{f_B} g_{q,s}(f) df}{\sqrt{1 - e^{-2}} \left(\int_0^{f_B} g_{q,n+\epsilon}^2(f) df \right)^{1/2}} =$$

$$= 0,96 \frac{\sqrt{T} \int_0^{f_B} g_{q,s}(f) df}{\left(\int_0^{f_B} g_{q,n+\epsilon}^2(f) df \right)^{1/2}}. \quad (4.4.44)$$

Коэффициент 0,96 в этом выражении не связан с особенностями цифровой обработки, а обусловлен, так же как и в непрерывном случае, переходом от среднителя с прямоугольным весовым окном (интегратора) к осреднителю с экспоненциальным окном (RC-фильтру), постоянная времени которого совпадает со временем осреднения [ср. (4.4.44) с зависимостями (2.1.65) и (2.1.66)].

Подынтегральная функция, входящая в числитель отношения (4.4.44), определяется просто:

$$g_{q,s}(f) = |\dot{V}^*(f)|^2 \bar{W}^T(f) G_s(f) \bar{W}(f), \quad (4.4.45)$$

где $\dot{W}(f)$ – КЧХ многомерного фильтра; $G_s(f)$ – матрица ВСПМ сигнала. Это выражение согласуется с числителем формулы (2.5.21), так как принято, что $\Delta = 1/2f_B$.

Определим теперь подынтегральную функцию, входящую в знаменатель отношения (4.4.44). Для этого потребуется учесть также погрешности ϵ и ошибки ξ_1 и ξ_2 . Так как додетекторная часть схемы, изображенной на рис. 4.14, линейна, то можно считать, что последовательность $q^*(n\Delta)$ содержит четыре аддитивных составляющих, обусловленных входным процессом $x_m(t)$, шумами квантования ϵ в АЦП и шумами арифметических ошибок ξ_1 и ξ_2 . В таком случае спектральную плотность $g_{q, n+\epsilon}(f)$ можно представить в виде четырех слагаемых:

$$g_{q, n+\epsilon}(f) = \Delta [g_{q, n}^*(f) + g_{q, \epsilon}^*(f) + g_{q, \xi_1}^*(f) + g_{q, \xi_2}^*(f)], \quad (4.4.46)$$

где учтено, что $g_{q, n+\epsilon}(f) = \Delta g_{q, n+\epsilon}^*(f)$, так как $\Delta = 1/2f_n$. Шумы АЦП ϵ действуют аддитивно с составляющими входного процесса $x_m(t)$ (см. рис. 4.14), поэтому на выходе АЦП матрица ВСПМ их суммы определяется выражением

$$G_{n, \epsilon}^*(f) = (1/\Delta) G_n(f) + 3\sigma_n^2 \cdot 2^{-2(m_{\text{АЦП}}+1)} E, \quad (4.4.47)$$

где в соответствии с определением ситуации H_0 $G_n(f)$ есть матрица ВСПМ входного шума, а второе слагаемое — матрица ВСПМ шумов квантования [см. (4.3.17)]. В результате для первых двух слагаемых формулы (4.4.46) получим

$$g_{q, n}^*(f) + g_{q, \epsilon}^*(f) = |\bar{V}(f)|^2 \bar{W}^T(f) G_{n, \epsilon}^*(f) \bar{W}(f). \quad (4.4.48)$$

Третье слагаемое следует из формулы (4.3.25):

$$g_{q, \xi_1}^*(f) = |\bar{V}(f)|^2 M \cdot 3\sigma_n^2 w_{\text{max}}^2 (N + B_u^2) 2^{-2(m_{\text{АУ1}}+1)}. \quad (4.4.49)$$

И наконец, четвертое слагаемое

$$g_{q, \xi_2}^*(f) = 3\sigma_u^2 v_{\text{max}}^2 (N' + B_v^2) 2^{-2(m_{\text{АУ2}}+1)} \quad (4.4.50)$$

определяется из формулы (4.4.35) аналогично (4.3.25), причем здесь $v_{\text{max}} = \max_k v_k$; σ_u^2 — дисперсия последовательности $u(n\Delta)$; B_v — множитель, который определяется аналогично B_u ; $m_{\text{АУ2}}$ — разрядность АУ скалярного фильтра.

Таким образом, все величины, входящие в выражение (4.4.46), определены. Подставив выражения (4.4.45) и (4.4.46) в формулу (4.4.44), получим выражение для выходного отношения с/ш \bar{Q} адаптивной цифровой СПВО (мы не будем записывать его в конечном виде, так как оно достаточно громоздко, а сами преобразования простейшие). Величина \bar{Q} определяется, как обычно, характеристиками помехо-сигнальной ситуации, а также параметрами цифровой СПВО: величинами порядков N и N' многомерного и скалярного фильтров, величиной единичной за-

держки Δ , разрядностью АЦП $m_{\text{АЦП}}$, разрядностями АУ $m_{\text{АУ1}}$ и $m_{\text{АУ2}}$ многомерного и скалярного фильтров. Задавая конкретные значения указанных параметров, можно определить выходное отношение с/ш \bar{Q} [см. (4.4.44)] цифровой адаптивной СПВО. Сравнение \bar{Q} с потенциально достижимой для данной помехо-сигнальной ситуации величиной Q [см. (2.1.69)] позволяет судить о потере помехоустойчивости СПВО в результате принятых значений параметров, контролируя таким образом их выбор. Интересно проследить за изменением величины \bar{Q} (4.4.44), когда величины параметров цифровой системы стремятся к предельным значениям. Для этого целесообразно разделить все параметры на две группы: первую — N , N' и Δ , вторую — $m_{\text{АЦП}}$, $m_{\text{АУ1}}$ и $m_{\text{АУ2}}$. Тогда, если параметры второй группы стремятся к бесконечности (шаг квантования в АЦП равен нулю, а разрядности цифровых устройств бесконечно велики), то формула (4.4.44) переходит в формулу (2.5.21), определяющую выходное отношение с/ш непрерывной системы, фильтры которой реализуются на ЛЗ с параметрами N , N' и Δ . Если, наконец, осуществить также предельный переход $N, N' \rightarrow \infty$ и $\Delta \rightarrow 0$, то система превращается в оптимальную, а ее выходное отношение с/ш есть Q [см. (2.1.69)].

В заключение рассмотрим случай, когда погрешностями, возникающими при выполнении арифметических действий в АУ скалярного фильтра, можно пренебречь. Тогда из выражений (4.4.46) — (4.4.49) следует, что

$$g_{q, n+\epsilon}(f) = |\bar{V}(f)|^2 \left\{ \bar{W}^T(f) [G_n(f) + 3\sigma_n^2 \cdot 2^{-2(m_{\text{АЦП}}+1)} \Delta \cdot E] \bar{W}(f) + M \cdot 3\sigma_n^2 w_{\text{max}}^2 (N + B_u^2) 2^{-2(m_{\text{АУ1}}+1)} \Delta \right\}. \quad (4.4.51)$$

Поэтому выражение \bar{Q} [см. (4.4.44)] принимает вид, аналогичный формуле (2.5.21), где в знаменателе эрмитову форму нужно заменить на выражение в фигурных скобках формулы (4.4.51). Далее, так же как в разд. 2.5, можно считать, что КЧХ скалярного фильтра $V(f)$ оптимизирована [см. (2.5.22)]. В результате формула для отношения с/ш \bar{Q} [см. (4.4.44)] становится аналогичной (2.5.23) с указанной выше заменой эрмитовой формы в знаменателе. В таком случае для линейной АР и простейшей помехо-сигнальной ситуации (плосковолновые сигнал и помеха, некоррелированный на элементах АР шум) формулу (4.4.44) нетрудно привести к виду выражения (2.5.24) и учесть при этом погрешности АЦП и ошибки АУ многомерного фильтра. Для этого достаточно в формуле (2.5.24) заменить выражение спектральной плотности шума $g_n(f)$ на выражение $[g_n(f) + 3\sigma_n^2 2^{-2(m_{\text{АЦП}}+1)} \Delta]$ (т. е. учесть и спектральную плотность шумов АЦП), а в знаменателе (2.5.24) добавить третий член, равный величине

$$M \frac{3\sigma_n^2 w_{\text{max}}^2 (N + B_u^2) 2^{-2(m_{\text{АУ1}}+1)} \Delta}{g_n(f) + 3\sigma_n^2 2^{-2(m_{\text{АЦП}}+1)} \Delta},$$

которая представляет собой спектральную плотность арифметических ошибок, возникающих в АУ многомерного фильтра, отнесенную к спектру входного шума и шума квантования. В формулу (2.5.24) необходимо ввести также множитель 0,96, учитывающий использование для реализации ФНЧ рекурсивного фильтра первого порядка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представление СПВО как многоканальной приемной системы и описание входной информации с помощью многомерного случайного процесса, порожденного пространственно-временной реализацией входного поля на элементах АР, позволяющие получить выражения, необходимые для решения задач синтеза и анализа этих систем. Описание входной информации в различных областях $\{r, t\}$, $\{r, f\}$ и $\{\varphi, f\}$ дает выявить основные свойства и особенности СПВО.

Методы исследования СПВО, как и любая статистическая теория [45], позволяют: 1) определить алгоритмы обработки и структуру оптимальной системы; 2) оценить потенциально достижимое качество обработки информации; 3) количественно сравнить свойства традиционной и субоптимальных систем с оптимальной. Положения теории оптимальных СПВО являются, таким образом, основой для проектирования субоптимальных (в том числе цифровых) СПВО и оценки эффективности их функционирования в реальных ситуациях.

Основным функциональным блоком оптимальной СПВО, отличающим ее от традиционной системы, является многомерный фильтр, осуществляющий пространственно-временную фильтрацию сигнала в поле шума и анизотропных (локальных) помех. Тем самым для данной помехосигнальной ситуации многомерный фильтр реализует оптимальное амплитудно-фазовое частотно-зависимое распределение на элементах АР. Алгоритм оптимальной СПВО (КЧХ многомерного фильтра) определяется пространственно-временными характеристиками полей сигнала, шума и помех, большая часть которых, однако, не может быть задана априори. Эти характеристики необходимо измерять в процессе работы системы. Простейшим способом измерения, реализуемого в ААС, является получение оценки ПВКФ поля на входе элементов АР. Адаптивная оптимизация СПВО и основывается на использовании алгоритмов ААС, что оказывается возможным в связи с тем, что алгоритм оптимального обнаружения многомерного сигнала включает в себя как часть алгоритм его оценивания, различные варианты которого используются в ААС.

В настоящей книге методы исследования СПВО базировались на рассмотрении линейной и плоской АР и простейших помехосигнальных ситуаций. Это позволило в большинстве случаев довести математические выкладки до конца и выявить основные свойства оптимальных и субоптимальных СПВО. Использование в составе СПВО антенн более сложной конфигурации, чем линейная или плоская, может существенно усложнить расчет системы. То же можно сказать и об учете направленности и частотных характеристик элементов АР.

1. *Абрамович Ю. И.* Регуляризованный метод адаптивной оптимизации фильтров по критерию максимума сигнал/шум // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 3. С. 543–551.
2. *Абрамович Ю. И., Неврев А. И.* Анализ эффективности адаптивной максимизации отношения сигнал/помеха, использующий обращение оценки корреляционной матрицы // Там же. 1981. Т. 26, № 12. С. 2559–2566.
3. *Адаптивная обработка сигналов в антенных решетках* / Бураков В. А., Зорин Л. А., Ратынский М. В. и др. // Зарубеж. радиоэлектроника. 1976. № 8. С. 35–59.
4. *Адаптивные компенсаторы помех. Принципы построения и применения* / Уилроу Б., Гловер Р., Маккул Д. и др. // Труды института по электротехнике и радиоэлектронике (ТИИЭР). 1975. Т. 63, № 12. С. 69–98.
5. *Божок Ю. Д., Красный Л. Г.* Компенсационные методы подавления локальных помех // Тр. шк.-семинара / 9-я Всес. шк.-семинар по стат. гидроакустике. Новосибирск: Мат. ин-т СО АН СССР. 1978. С. 139–143.
6. *Божок Ю. Д., Красный Л. Г., Майстренко С. Н.* Выбор параметров фильтров в компенсаторах локальных помех // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1981. Т. 24, № 4. С. 52–57.
7. *Бриллинджер Д.* Временные ряды. М.: Мир, 1980. С. 536.
8. *Бэггеруер А. Б.* Обработка сигналов в гидролокации // Применение цифровой обработки сигналов / Под ред. Э. Оппенгейма. М.: Мир, 1980. С. 367–485.
9. *Ван-Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. В 3-х т. М.: Сов. радио. 1972–1977. Т. 1, Т. 3. С. 662, 744.
10. *Ванштейн Л. А., Зубаков В. Д.* Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Сов. радио, 1960. С. 440.
11. *Введение в статистическую радиофизику: В 2 ч.* / Под ред. С. М. Рытова. М.: Наука, 1978. Ч. II: Случайные поля. С. 540.
12. *Верешкин А. Е., Катковник В. Я.* Линейные цифровые фильтры и методы их реализации. М.: Сов. радио, 1973. С. 150.
13. *Вопросы статистической теории радиолокации: В 2-х т. Т. 1* / Под ред. Тартаковского. М.: Сов. радио, 1963. С. 478.
14. *Галаненко В. Б., Гаткин Н. Г., Красный Л. Г.* Оптимальная пространственно-временная обработка сигналов в поле гауссовских помех // Тр. шк.-семинара / 3-я Всес. шк.-семинар по гидроакустике. М.: ВНИИФТРИ, 1972. С. 146–156.
15. *Гаткин Н. Г.* Алгоритмы оптимальной пространственно-временной обработки случайных полей // Тр. шк.-семинара / 4-я Всес. шк.-семинар по стат. гидроакустике. Новосибирск: Мат. Ин-т СО АН СССР, 1973. С. 168–200.
16. *Гриффиц Л.* Простой адаптивный алгоритм для обработки сигнала в антенных решетках в реальном времени // ТИИЭР. 1969. Т. 57, № 10. С. 6–16.
17. *Гусев В. Г.* Методы исследования точности цифровых автоматических систем. М.: Наука, 1973. С. 400.

18. Он же. О связи теоретических основ некоторых современных способов цифровой обработки сигналов с классическим методом гармонического анализа // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 10. С. 2141–2147.
19. Гусев В. Г., Лоскутова Г. В. Об использовании алгоритма двумерного быстрого преобразования Фурье для обработки информации от линейной антенной решетки // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27, № 12. С. 2362–2366.
20. Гусев В. Г., Черенкова Е. В. Об адаптивной оптимизации алгоритма обнаружения в системе пространственно-временной обработки информации // Тр. шк.-семинара / 10-я Всес. шк.-семинар по стат. гидроакустике. Новосибирск: Мат. ин-т СО АН СССР. 1980. С. 92–94.
21. Гусев В. Г., Черенкова Е. В. О связи алгоритмов адаптивной оптимизации антенных решеток с алгоритмом оптимального обнаружения многомерного стохастического сигнала // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 12, С. 2366–2372.
22. Даджон Д. Э. Основы цифровой обработки сигналов в решетках // ТИИЭР. 1977. Т. 65, № 6. С. 99–107.
23. Дентано М., Маккул Дж., Уидроу Б. Адаптивная фильтрация в частотной области // Там же. 1978. Т. 66, № 12. С. 81–83.
24. Дженкинс Г., Ватс Д. Спектральный анализ и его приложения. Вып. II. М.: Мир, 1972. С. 228.
25. Джим Ч. У. Сравнение двух оптимальных по минимуму СКО устройств обработки сигналов в антенных решетках // ТИИЭР. 1977. Т. 65, № 12. С. 121–122.
26. Джонсон Д. Х. Применение методов спектрального оценивания к задачам определения угловых координат источников излучения // Там же. 1982. Т. 70, № 9. С. 126–139.
27. Ефимов В. М. Квантование по времени при измерении и контроле. М.: Энергия, 1969. С. 88.
28. Жмыхов Г. В. Об оценке направления прихода широкополосного шумового сигнала методом максимума правдоподобия // Тр. ин-та акуст. 1968. Вып. IV. С. 114–127.
29. Журавлев А. К., Лукошкин А. П., Поддубный С. С. Обработка сигналов в адаптивных антенных решетках. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. С. 240.
30. Журавлев А. К., Хлебников В. А. Пространственное разрешение точечных источников в антенных решетках // Обработка пространственно-временных сигналов. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1983. С. 8–12.
31. Кей С. М., Марпл С. Л. Современные методы спектрального анализа // ТИИЭР. 1981. Т. 69, № 11. С. 5–51.
32. Кейпон Дж. Пространственно-временной анализ с высоким разрешением // Там же. 1969. Т. 57, № 8. С. 69–79.
33. Клячкин В. И. О характеристических функционалах некоторых гидроакустических полей // Тр. шк.-семинара / 2-я Всес. шк.-семинар по стат. гидроакустике. Новосибирск: Наука, 1971. С. 61–91.
34. Коваленко Л. Н., Красный Л. Г., Скрипка Н. И. Пространственно-временная обработка сигналов в поле двухкомпонентной помехи // Радиотехника. 1983. Т. 38, № 7. С. 70–75.
35. Корн Г. А. Моделирование случайных процессов на аналоговых и аналого-цифровых машинах. М.: Мир, 1968. С. 316.
36. Косякин А. А. Статистическая теория квантования по уровню // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22, № 6. С. 722–729.
37. Он же. Статистический анализ цифровых автоматических систем // Много-связные и инвариантные системы: Нелинейные и дискретные системы. М.: Наука, 1968. С. 720.
38. Крон Б., Шерман Ч. Функции пространственной корреляции для различных моделей шума // Некоторые проблемы обнаружения сигнала, маскируемого флуктуационной помехой. М.: Сов. радио, 1965. С. 114.

39. Кузь Н. Я. К вопросу о влиянии структуры гауссовских мешающих сигналов на характер оптимальной пространственно-временной обработки // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20, № 10. С. 2063–2069.
40. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978. С. 296.
41. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. С. 280.
42. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники: В 3-х т. М.: Сов. радио, 1969–1975. Т. 1–2. С. 392, 748.
43. Левшин В. П., Стручев В. Ф. Адаптивные фазированные антенные решения с ограниченным числом степеней управления // Зарубеж. радиоэлектроника. 1982. № 1. С. 31–42.
44. Макклеллан Дж. Х. Многомерный спектральный анализ // ТИИЭР. 1982. Т. 70, № 9. С. 139–152.
45. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. В 2-х т. М.: Сов. радио, 1962. Т. 2. С. 832.
46. Монзинго Р. А., Миллер Т. У. Адаптивные антенные решетки. М.: Радио и связь, 1986. С. 446.
47. Найт У. С., Придэм Р. Г., Кей С. М. Цифровая обработка сигналов в гидро-локационных системах // ТИИЭР. 1981. Т. 69, № 11. С. 84–155.
48. О пространственно-временной обработке шумового сигнала / Гаткин Н. Г., Карновский М. И., Красный Л. Г. и др. // Радиотехника. 1973. Т. 28, № 5. С. 9–16.
49. Обнаружение шумовых сигналов в поле распределенных и локальных помех / Гаткин Н. Г., Горбенко В. С., Зализняк С. Н. и др. // Труды 4-й Всес. шк.-семинара по стат. гидроакустике. Новосибирск: Мат. ин-т СО АН СССР, 1973. С. 201–212.
50. Ольшевский В. В. Статистические методы в гидролокации. Л.: Судостроение, 1983. С. 280.
51. Оппенгейм А. В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов. М.: Связь, 1979. С. 416.
52. Пономарева В. Д., Комаров В. М. Адаптивные антенные решетки // Зарубежная радиоэлектроника. 1977. № 8. С. 33–66.
53. Пространственно-временная обработка сигналов / Под. ред. И. Я. Кремера. М.: Радио и связь, 1984. С. 224.
54. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. С. 848.
55. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1977. С. 432.
56. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. С. 464.
57. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976. С. 496.
58. Смаришев М. Д. Направленность гидроакустических антенн. Л.: Судостроение, 1973. С. 278.
59. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978. С. 320.
60. Сосулин Ю. Г., Паршин Ю. Н. Оценочно-корреляционно-компенсационные алгоритмы обнаружения многомерных сигналов // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 8. С. 1635–1643.
61. Стационарные и нестационарные характеристики обучения адаптивных фильтров, использующих критерий минимума СКО / Уидроу Б., Маккул Д., Ларимор М. Г. и др. // ТИИЭР. 1976. Т. 64, № 8. С. 37–51.
62. Стратонович Р. Л. Принципы адаптивного приема. М.: Сов. радио, 1973. С. 142.
63. Сысоев А. П. Оценки параметров, обнаружение и различение сигналов. М.: Наука, 1969. С. 174.

64. *Теоретические основы радиолокации* / Под ред. Я. Д. Ширмана. М.: Сов. радио, 1970. С. 560.
65. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. С. 624.
66. *Уидроу Б., Мантей Р., Гриффитс Л.* Адаптивные антенные системы / ТИИЭР. 1967. Т. 55, № 12. С. 78–95.
67. *Уидроу Б., Маккул Д., Бола М.* Комплексная форма алгоритма НСКО // Там же. 1975. Т. 63, № 3. С. 49–51.
68. *Урик Р. Дж.* Основы гидроакустики. Л.: Судостроение, 1978. С. 446.
69. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963. С. 450.
70. *Фалькович С. Е.* Оценка параметров сигнала. М.: Сов. радио, 1970. С. 334.
71. *Фрост О. Л.* Алгоритм линейно-ограниченной обработки сигналов в адаптивных решетках // ТИИЭР. 1972. Т. 60, № 8. С. 5–16.
72. *Хестенс М. Р.* Элементы вариационного исчисления // Современная математика для инженеров / Под ред. Э. Ф. Беккенбаха. М.: ИИЛ, 1958. С. 500.
73. *Цифровые фильтры в электросвязи и радиотехнике* / Под ред. Л. М. Гольденберга. М.: Радио и связь, 1982. С. 222.
74. *Цыпкин Я. З.* Основы теории обучающихся систем. – М.: Наука, 1970. С. 252.
75. *Он же.* Теория линейных импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1963. С. 968.
76. *Черняк В. С.* Пространственно-частотная фильтрация сигналов на фоне стохастических помех в многоканальных приемных системах // Радиотехника и электроника. 1973. Т. 18, № 5. С. 959–969.
77. *Ширман Я. Д., Манжос В. Н.* Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех // М.: Радио и связь, 1981. С. 416.
78. *Anderson V. C.* DICANNE, a realizable adaptive process // Journ. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 45, N 2. P. 398–405.
79. *Anderson V. C.* Side lobe interference suppression with an adaptive null processor // Journ. Acoust. Soc. Am. 1981. V. 69, N 1. P. 185–190.
80. *Anderson V. C., Rudnick P.* Rejection of a coherent arrival at an array // Journ. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 45, N 2. P. 406–410.
81. *Applebaum S. P., Chapman P. J.* Adaptive arrays with main beam constraints // IEEE Trans. on antennas and propagation. 1976. V. 24, N 5. P. 650–662.
82. *Bienvenu G.* Underwater passive detection and special coherence testing // Journ. Acoust. Soc. Am. 1979. V. 65, N 2. P. 425–437.
83. *Brennan L. E., Mallett J. D., Reed I. S.* Adaptive arrays in airborne MTI radar // IEEE Trans. on antennas and propagation. 1976. V. 24, N 5. P. 607–615.
84. *Bryn F.* Optimum signal processing of tree-dimensional arrays operating on gaussian signals and noise // Journ. Acoust. Soc. Am. 1962. V. 34, N 3. P. 289–297.
85. *Cantoni A., Godard C.* Resolving direction of source in a correlation field incident on an array // Journ. Acoust. Soc. Am. 1980. V. 67, N 4. P. 1247–1255.
86. *Chapman D. J.* Partial adaptivity for the large array // IEEE Trans. on antennas and propagation. 1976. V. 24, N 5. P. 685–696.
87. *Cheng D. K., Tseng F.* Optimum special processing in a noisy environment for arbitrary antenna arrays subject to random errors // IEEE Trans. on antennas and propagation. 1968. V. 16, N 2. P. 164–171.
88. *Cox H.* Optimum array and the Swartz inequality // Journ. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 45, N 1. P. 228–232.
89. *Cox H.* Resolving power and sensitivity to mismatch of optimum array processors // Journ. Acoust. Soc. Am. 1973. V. 54, N 3. P. 771–785.
90. *Cox H.* Special correlation on arbitrary noise fields with application ambient sea noise // Journ. Acoust. Soc. Am. 1973. V. 54, N 5. P. 1289–1301.
91. *Edelblute D. J., Fisk J. M., Kinnison G. L.* Criteria for optimum signal detection theory for arrays // Journ. Acoust. Soc. Am. 1967. V. 41, N 1. P. 199–205.

92. *Gray D. A.* Formulation of the maximum signal-to-noise ratio array processor in beam space // Journ. Acoust. Soc. Am. 1982. V. 72, N 4. P. 1195–1201.
93. *Griffiths L. J., Jim C.* An alternative approach to linearly constrained adaptive beamforming // IEEE Trans. on antennas and propagation. 1982. V. 30, N 1. P. 27–34.
94. *Lewis J. B., Shultheiss P.* Optimum and conventional detection using a linear array // Journ. Acoust. Soc. Am. 1971. V. 49, N 4. P. 1083–1091.
95. *Mac-Donald V. H., Shultheiss P.* Optimum passive bearing estimation in a spatially noise environment // Journ. Acoust. Soc. Am. 1969. V. 46, N 1. P. 37–43.
96. *Pasupathy S.* Optimum spatial processing of passive sonar signals // IEEE Trans. on aerosp. and electron. syst. 1978. V. 14, N 1. P. 158–164.
97. *Reed I. S., Mallett J. D., Brennan L. E.* Rapid convergence rate in adaptive arrays // IEEE Trans. on aerosp. and electron. syst. 1974. V. 10, N 6. P. 853–863.
98. *Schultheiss P. M.* Passive sonar detection in the presence of interference // Journ. Acoust. Soc. Am. 1968. V. 43, N 3. P. 418–425.
99. *Spirad A., Snyder D. L.* A necessary and sufficient condition for quantization errors to be uniform and white // IEEE Trans. on acoustics, speech and signal processing. 1977. V. 25, N 5. P. 442–448.
100. *Steinberg B. D.* Principles of aperture and array system design. N. Y.: John Wiley and sons, 1976. P. 356.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Основные сокращения и обозначения	4
Введение	7
Глава 1. Многоканальные приемные системы и пространственно-временные поля	9
1.1. Многомерные случайные процессы	9
1.2. Многоканальные системы	14
1.3. Пространственно-временные поля	18
1.4. Вероятностное описание реализаций пространственно-временного поля на выходе элементов антенной решетки	26
1.5. Вероятностные характеристики реализаций типовых пространственно-временных полей	36
Глава 2. Системы пространственно-временной обработки	45
2.1. Оптимальные системы обнаружения многомерного сигнала (синтез и анализ)	45
2.2. Синтез оптимального многомерного фильтра системы пространственно-временной обработки заданной структуры	68
2.3. Особенности оптимизации системы пространственно-временной обработки, решающей задачу обнаружения сигнала в поле изотропного шума и локальных помех	84
2.4. Субоптимальные системы пространственно-временной обработки, основанные на упрощении структуры оптимальной системы	101
2.5. Синтез оптимальной системы на основе использования дискретных пространственно-временных выборочных значений реализаций поля	116
2.6. Синтез оптимальной системы на основе использования дискретных частотно-волновых выборочных значений реализации поля	125
2.7. Задачи оценки параметров многомерных сигналов в системе пространственно-временной обработки	136
Глава 3. Адаптивная оптимизация систем пространственно-временной обработки	152
3.1. Алгоритмы адаптивной оптимизации антенной системы, основанные на минимизации среднеквадратической ошибки оценки сигнала и связи задач фильтрации и обнаружения многомерного сигнала	153
3.2. Алгоритм адаптивной оптимизации антенной системы, основанной на минимизации ее выходной мощности при сохранении желаемой частотной характеристики системы для заданного направления	168
3.3. Влияние факторов, связанных с условиями функционирования системы пространственно-временной обработки, на ее эффективность	180
3.4. Некоторые разновидности адаптивных антенных систем	199
Глава 4. Цифровые адаптивные системы пространственно-временной обработки	211
4.1. Задача и функции цифровой пространственно-временной обработки в адаптивных системах	211
4.2. Особенности представления дискретных сигналов и систем	214
4.3. Способы учета погрешностей аналого-цифрового преобразования входной информации и ошибок арифметических действий	223
4.4. Расчетные модели типовых функциональных блоков цифровой адаптивной СПВО	235
Заключение	258
Список литературы	259